

Série 2 (Corrigé)

Cette série suit le chapitre 1 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *solutions, Gauss-Jordan, formes échelonnées, formes échelonnées-réduites*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

- i) Écrire les matrices augmentées correspondant aux systèmes linéaires suivants.
- ii) Résoudre ces systèmes linéaires en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes de ces matrices augmentées.

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 12 \\ x_3 + 2x_1 - 4x_2 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 4x_1 = -8 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ 5x_3 - x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Sol.:

$$\text{a) Matrice augmentée : } \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{Forme échelonnée réduite : } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ Solution : } x_1 = 3, x_2 = 2.$$

$$\text{b) Matrice augmentée : } \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 & -8 \end{pmatrix},$$

$$\text{Forme échelonnée réduite : } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ Solution : } x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1.$$

c) Matrice augmentée : $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 & 11 \\ -3 & 2 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & 2 & 9 \end{pmatrix},$

Forme échelonnée réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$ Solution : $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4.$

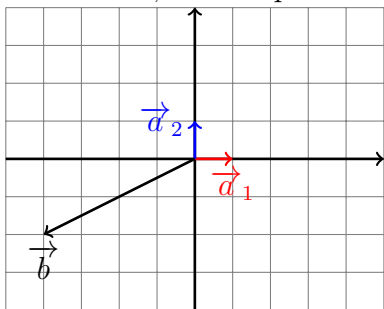
d) Matrice augmentée : $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

Forme échelonnée réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$ Solution : $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 1.$

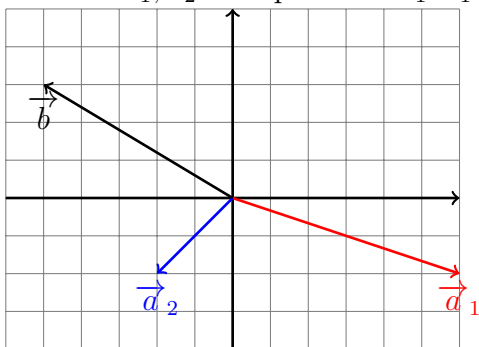
Exercice 2

À l'aide des graphes ci-dessous, trouver les coefficients des combinaisons linéaires demandées. Il se peut qu'il existe plusieurs solutions, ou aucune solution. Dans les graphes ci-dessous, un carré = 1 unité.

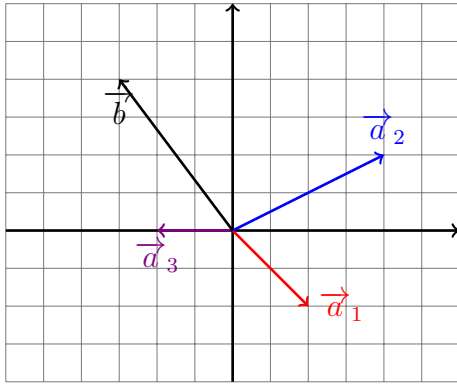
a) Trouver λ_1, λ_2 tels que $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$



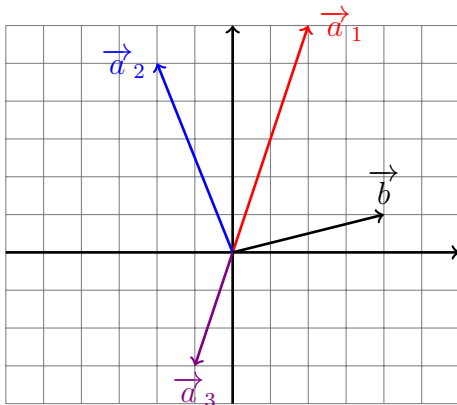
b) Trouver λ_1, λ_2 tels que $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$



c) Trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3$



- d) Trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3$. Peut-on trouver μ_1 et μ_3 tels que $\vec{b} = \mu_1 \vec{a}_1 + \mu_3 \vec{a}_3$?



Sol.:

- a) $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -2$
 b) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1/2$
 c) Il y a une infinité de solutions. En voici une : $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = -1/2$
 d) Il y a une infinité de solutions. En voici deux : $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = -2$ ou $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 0$. Non on ne peut pas trouver de μ_1 et μ_3 tels que \vec{b} soit une combinaison linéaire de \vec{a}_1 et \vec{a}_3 , car ces deux vecteurs sont colinéaires.

Une autre méthode est d'écrire les systèmes d'équations qui correspondent aux équations vectorielles à résoudre.

Exercice 3

- a) Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée puis sous forme échelonnée réduite.
 b) Supposons que ces matrices sont des matrices augmentées de systèmes linéaires. Déterminer dans chaque cas si le système linéaire possède exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.: $A : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, infinité de solutions (x_3 est une variable libre),

$B : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pas de solution,

$C : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pas de solution.

Exercice 4

- Vérifier si les matrices suivantes sont sous forme échelonnée ou sous forme échelonnée réduite.
- Identifier les variables de bases (ou principales) et les variables libres.
- Déterminer si les systèmes linéaires correspondant possèdent exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol.:

- forme échelonnée, forme échelonnée réduite. Variables principales : x_1, x_2, x_3 . Variables libres : aucune. Solution unique.
- forme échelonnée, forme échelonnée réduite. Variables principales : x_1, x_2 . Variable libre : x_3 . Infinité de solutions.
- forme échelonnée, forme échelonnée réduite. Variables principales : x_1, x_2 . Variable libre : x_3 . Pas de solution.
- forme échelonnée, pas une forme échelonnée réduite. Variables principales : x_2, x_3 . Variable libre : x_1 . Infinité de solutions.
- pas une forme échelonnée. Infinité de solutions.

Exercice 5

Déterminer si les systèmes linéaires homogènes suivants ont une solution non triviale.

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \\ \text{b)} & \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases} \\ \text{c)} & \begin{cases} -7x_1 + 37x_2 + 119x_3 = 0 \\ 5x_1 + 19x_2 + 57x_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Sol.:

- a) La matrice des coefficients est carrée (autant d'équations que d'inconnues) et on peut remarquer que $L_1 = L_2 + L_3$. Il s'agit d'une relation de dépendance linéaire sur les lignes. On obtiendra une ligne de zéros dans la matrice, et il n'y aura pas trois pivots. On a alors au moins une variable libre et donc une infinité de solutions (non-triviales).

On peut aussi résoudre le système. La forme échelonnée réduite de la matrice augmentée est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{17}{8} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sa solution générale est

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{17}{8}x_3 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_3 \end{cases}.$$

Il existe une infinité de solutions non triviales (prendre $x_3 \neq 0$).

- b) Forme échelonnée réduite de la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution triviale ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$).

- c) Le système a moins d'équations (deux) que d'inconnues (trois), il ne peut pas y avoir trois pivots. Le système est compatible (on échelonne pour le voir), donc il existe une infinité de solutions.

Exercice 6

A l'aide de l'algorithme d'élimination de Gauss, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} w + 2x - y = 4 \\ -y + x = 3 \\ w + 3x - 2y = 7 \\ 2u + 4v + w + 7x = 7 \end{cases}$$

Sol.: En utilisant les variables dans l'ordre x, y, u, v, w , on peut écrire la matrice augmentée suivante (la dernière colonne correspond aux termes inhomogènes), que l'on échelonne :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 7 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 + (-2) \cdot L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + (-3) \cdot L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 + (-7) \cdot L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 2 & 4 & -14 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_3 \rightarrow L_3 + (-1) \cdot L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 + (-7) \cdot L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_4 \rightarrow \frac{L_4}{2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\underset{\sim}{L4 \leftrightarrow L3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \underset{\sim}{L1 \rightarrow L1+1 \cdot L2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Cela est équivalent au système :

$$\begin{cases} x + w = 1 \\ y + w = -2 \\ u + 2v - 3w = 0 \end{cases}$$

qui a comme solutions

$$x = 1 - w, y = -2 - w, u = 3w - 2v,$$

où v et w sont des nombres réels quelconques (il y a donc une infinité de solutions). Pour mieux voir géométriquement ces solutions on aime les écrire sous la forme suivante

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'un plan dans \mathbb{R}^5 passant par le point $(1, -2, 0, 0, 0)$. Il y a deux *paramètres*, v et w , qui peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle. On dit aussi qu'on a deux degrés de liberté.

Si on avait fait le choix (probablement plus logique) d'ordonner les inconnues par ordre alphabétique, la matrice du système sera différente et sa forme échelonnée et réduite également :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 0 & 7 \end{array} \right) \underset{\sim}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

et la forme paramétrique de la solution générale est alors, pour toutes valeurs réelles de v et y :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

Considérons les vecteurs $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$, et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Est-il possible d'écrire \vec{b} comme combinaison linéaire de \vec{a}_1 et \vec{a}_2 ?
- Donner une interprétation géométrique du résultat.

Sol.:

- a) Non. Considérons l'équation linéaire $x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 = \vec{b}$, d'inconnues x_1, x_2 . Le système linéaire correspondant est

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = -3 \\ -2x_1 - 13x_2 = 8 \\ 3x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$$

avec pour matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & -3 \\ -2 & -13 & 8 & 8 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

et pour forme échelonnée réduite

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array} \right).$$

On peut voir que ce système ne possède pas de solution.

- b) Cela signifie que le vecteur \vec{b} n'appartient pas au plan formé des vecteurs $x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2$, avec x_1 et x_2 réels.

Exercice 8

Le système linéaire suivant où a est un paramètre réel

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 1 \\ 2y + 2z = 1 - 2a \\ 2x + 4ay + 2z = 1 \\ 4x + 4ay + 2z = 1 + 2a \end{cases}$$

- possède une solution unique lorsque $a = 1/2$
- ne possède aucune solution lorsque $a \neq 1/2$
- possède une infinité de solutions lorsque $a = 1/2$
- ne possède aucune solution lorsque $a = 1/2$

Sol.: On écrit la matrice augmentée et on travaille :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 - 2a \\ 2 & 4a & 2 & 1 \\ 4 & 4a & 2 & 1 + 2a \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{L3} \rightarrow \text{L3} + (-1) \cdot \text{L1} \\ \text{L4} \rightarrow \widetilde{\text{L4}} + (-2) \cdot \text{L1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 - 2a \\ 0 & 4a - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4a - 4 & -2 & 2a - 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{L3} \rightarrow \text{L3} + (-2a) \cdot \text{L2} \\ \text{L4} \rightarrow \widetilde{\text{L4}} + (-2a) \cdot \text{L2} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 - 2a \\ 0 & -2 & -4a & -2a + 4a^2 \\ 0 & -4 & -2 - 4a & 4a^2 - 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{L3} \rightarrow \text{L3} + \text{L2} \\ \text{L4} \rightarrow \widetilde{\text{L4}} + 2 \cdot \text{L2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 - 2a \\ 0 & 0 & 2(1 - 2a) & (1 - 2a)^2 \\ 0 & 0 & 2(1 - 2a) & (1 - 2a)^2 \end{array} \right)$$

On distingue alors deux cas :

- Si $(1 - 2a) = 0$, c'est-à-dire $a = \frac{1}{2}$, alors on a les équations : $2x + 2y + 2z = 1$ ainsi que $2y + 2z = 0$, ce qui donne les solutions $x = \frac{1}{2}$, $y = -z$ (infinité de solutions paramétrées par $z \in \mathbb{R}$).
- Si $(1 - 2a) \neq 0$, alors la dernière équation donne $z = \frac{1-2a}{2}$. On trouve ensuite $y = 0$ et, finalement, $x = a$. Dans ce cas, le système possède une seule solution.

Deux remarques :

1. Lors d'un examen il n'est pas nécessaire de trouver les solutions explicitement. Il suffit de se rendre compte que la matrice augmentée du système sous sa forme échelonnée ne contient aucune ligne dont le pivot se trouve dans la colonne des termes de droites (les b_i) pour conclure le système a toujours au moins une solution (ce qui élimine les réponses 2 et 4).
2. Dans ce cas, il a été judicieux de ne pas diviser la première ligne de la matrice par deux, ce qui aurait fait apparaître des fractions et aurait rendu les calculs plus dur.

Exercice 9

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice augmentée ne changent jamais l'ensemble des solutions du système linéaire associé.
- b) Un système incompatible a plus d'une solution.

Sol.:

- a) Vrai. Il suffit de s'en rendre compte pour chaque type d'opération élémentaire. Par exemple, échanger deux lignes (équations) ne change clairement pas l'ensemble des solutions du système. Multiplier une ligne par un facteur non-nul, ne change pas les solutions (par contre multiplier par 0 une ligne change radicalement le système) et le dernier cas se vérifie aisément.
- b) Faux. Un système incompatible peut avoir aucune solution.

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) En appliquant différentes opérations (licites) sur les lignes d'une matrice, on obtient des formes échelonnées réduites différentes.
- b) Une variable de base d'un système linéaire est une variable qui correspond à un pivot dans une colonne.
- c) La dernière colonne d'une matrice augmentée peut faire office de colonne pivot.
- d) Un système n'est compatible que lorsque chaque colonne contient un pivot.

Sol.:

- a) Faux. La forme échelonnée **réduite** d'une matrice A est unique, tandis qu'une forme échelonnée de A n'est pas nécessairement unique.
- b) Vrai. Une variable de base d'un système linéaire est une variable qui correspond à un pivot dans une colonne.

c) Vrai. Selon la définition vue en classe cela est correct, le système est alors incompatible.

d) Faux. Prenons par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est déjà échelonnée réduite. La dernière colonne de A n'a pas de pivot mais le système $A\vec{x} = \vec{0}$ possède la solution $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et est donc compatible.

Exercice 11

Montrer que les opérations élémentaires sur les lignes (à savoir, l'ajout d'une ligne à une autre, l'échange de deux lignes, et la multiplication d'une ligne par un réel non nul) transforment un système linéaire en un système équivalent.

Sol.: Considérons la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} & b_l \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (1)$$

correspondant au système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \\ \dots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + a_{ln}x_n = b_l \\ \dots \end{cases} \quad (2)$$

Opération 1 (Ajout d'une ligne à une autre) : Le remplacement de la ligne l par la somme des lignes l et k ($k \neq l$) donne

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{l1} + a_{k1} & a_{l2} + a_{k2} & \dots & a_{ln} + a_{kn} & b_l + b_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

ce qui correspond au système

$$\begin{cases} \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \\ \dots \\ (a_{l1} + a_{k1})x_1 + (a_{l2} + a_{k2})x_2 + \dots + (a_{ln} + a_{kn})x_n = b_l + b_k \\ \dots \end{cases} \quad (3)$$

(Cette opération est réversible : si on soustrait la ligne k de la ligne l , on retrouve bien le système initial (??).) Montrons que les systèmes sont équivalents. D'une part, si (s_1, \dots, s_n) est une solution

du système original, alors $a_{k1}s_1 + a_{k2}s_2 + \dots + a_{kn}s_n = b_k$ et $a_{l1}s_1 + a_{l2}s_2 + \dots + a_{ln}s_n = b_l$. Dès lors, en additionnant ces deux égalités, on a aussi que $(a_{l1} + a_{k1})s_1 + (a_{l2} + a_{k2})s_2 + \dots + (a_{ln} + a_{kn})s_n = b_l + b_k$, et il est alors clair que (s_1, \dots, s_n) est aussi une solution du système modifié (les lignes autres que l et k ne sont pas affectées). D'autre part, si (s_1, \dots, s_n) est une solution du système modifié, alors $a_{k1}s_1 + a_{k2}s_2 + \dots + a_{kn}s_n = b_k$ et $(a_{l1} + a_{k1})s_1 + (a_{l2} + a_{k2})s_2 + \dots + (a_{ln} + a_{kn})s_n = b_l + b_k$. En soustrayant l'une à l'autre, on déduit que $a_{l1}s_1 + a_{l2}s_2 + \dots + a_{ln}s_n = b_l$, et donc (s_1, \dots, s_n) est aussi une solution du système original. (A nouveau, les lignes autres que l et k ne sont pas affectées). Ces deux arguments ensemble montrent bien que les ensembles solutions des deux systèmes sont identiques, car l'un est inclus dans l'autre et vice versa.

Opération 2 (Échange de deux lignes) : Il est évident que l'échange de deux lignes du système donne un système équivalent : on pourrait le formaliser, mais ce n'est pas particulièrement instructif.

Opération 3 (Multiplication d'une ligne par un réel non nul) : Multiplier la ligne k par $\beta \neq 0$ donne

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta a_{k1} & \beta a_{k2} & \dots & \beta a_{kn} & \beta b_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

correspondant au système

$$\begin{cases} \dots \\ \beta a_{k1}x_1 + \beta a_{k2}x_2 + \dots + \beta a_{kn}x_n = \beta b_k \\ \dots \end{cases}$$

(Cette opération est réversible puisque $\beta \neq 0$: on peut re-diviser par β .) Pour argumenter que les systèmes sont bien équivalents, procédez comme ci-dessus : montrez que toute solution de l'un est une solution de l'autre, et inversement.

Exercice 12

Montrer que le système d'équations linéaires suivant n'a pas de solution :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - 2y - z - u = 3 \\ x + 3y + 2z + u = 5 \\ 3x + 4y + 3z + 3u = 7 \end{cases}$$

Sol.: Le calcul nous donne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

Comme $7 \neq 0$, le système n'a pas de solution.

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, Orane Pouchon, Jérôme Scherer, José Luis Zuleta, ...). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.