

Série 14 (Corrigé)

Cette série suit les chapitres 6 et 7 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *diagonalisation en base orthonormée, décomposition spectrale, SVD*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Soit A une matrice réelle de taille $n \times n$. Montrer que si $A = A^T$, alors pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ le nombre $\overline{x}^T Ax$ est réel. En déduire que les valeurs propres d'une matrice réelle et symétrique sont réelles.

Sol.: Vu que A est réelle ($A = \overline{A}$) et symétrique ($A = A^T$), on obtient

$$\overline{\overline{x}^T Ax} = x^T \overline{A\overline{x}} = \underbrace{x^T A\overline{x}}_{\in \mathbb{C}} = (x^T A\overline{x})^T = \overline{x}^T Ax.$$

Il s'ensuit que $\overline{x}^T Ax$ est réel. En plus, si x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ de A , alors

$$\overline{x}^T Ax = \overline{x}^T \lambda x = \lambda \overline{x}^T x.$$

On observe que $\overline{x}^T x = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} x_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \in \mathbb{R}$. D'où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite de régression correspondant aux points $(3, 2)$, $(-1, 2)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$.

Sol.: On va résoudre $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$ où A , \vec{b} et \vec{x} sont donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{et } \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

On obtient

$$A^T A = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{et } A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Après résolution, on obtient $a = \frac{-1}{5}$ et $b = \frac{11}{5}$. Ainsi

$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{11}{5}.$$

Exercice 3

Soit A une matrice symétrique inversible. Montrer qu'alors l'inverse de A est aussi symétrique.

Contrairement au solutionnaire, on vous recommande ici d'utiliser le théorème spectral.

Sol.: Nous avons montré que $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ pour toute matrice inversible A . Supposons maintenant que A est symétrique, i.e. $A = A^T$. Alors

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$$

Nous avons montré que A^{-1} est symétrique.

Exercice 4

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser A en base orthonormée.

Sol.: Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Méthode 1 On calcule le polynôme caractéristique $c_A(t) = \dots = (t-6)(t-2)^3$, et on trouve $\lambda \in \{6, 2\}$. **Méthode 2** On voit que la somme de chaque ligne vaut 6. Ainsi

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient que 2 est une valeur propre en utilisant que la somme des valeurs propres donne la trace de A et le produit des valeurs propres donne le déterminant de A . On obtient que 6 est une valeur propre et 2 est une valeur propre de multiplicité géométrique 3 puisque la matrice $A - 2I_4$ est de rang 1. On en conclut sans faire de calculs que $c_A(t) = (t-6)(t-2)^3$.

On calcule ensuite les espaces propres et on cherche dans chacun d'eux une base orthonormée de vecteurs propres. D'abord

$$E_6 = \text{span} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

On obtient

$$E_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

On utilise alors le procédé de Gram-Schmidt pour que la base de E_2 soit orthonormée :

$$E_2 = \text{span} \left(\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right)$$

La matrice de changement de base suivante est donc orthogonale :

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/6 & 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/6 & 1/2 \\ 0 & -\sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse de P est la transposée P^T et la formule du changement de base donne enfin

$$D = P^T A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

Diagonaliser les matrices suivantes sous la forme $A = Q D Q^T$, avec Q une matrice orthogonale.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Sol.:

- a) A est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable en base orthonormale d'après le théorème spectral. On trouve

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

- b) De même, A est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable en base orthonormale d'après le théorème spectral. On trouve

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

- i) Montrer qu'il existe une base orthonormale $\{u_1, \dots, u_n\}$ de \mathbb{R}^n et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \dots + \lambda_n u_n u_n^T.$$

- ii) Calculer la décomposition ci-dessus pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol.:

- i) **Méthode 1.** On applique le théorème spectral à la matrice symétrique A . Il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D telles que

$$A = QDQ^T.$$

On note $Q = (u_1, \dots, u_n)$ les colonnes de Q , et on pose $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Comme Q est une matrice orthogonale, (u_1, \dots, u_n) est une base orthonormée. De plus, on a

$$\begin{aligned} A &= QDQ^T = (u_1, \dots, u_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix} \\ &= (u_1, \dots, u_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1^T \\ \vdots \\ \lambda_n u_n^T \end{pmatrix} = \lambda_1 u_1 u_1^T + \dots + \lambda_n u_n u_n^T. \end{aligned}$$

Méthode 2. Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ une base orthonormale de \mathbb{R}^n donnée par le théorème spectral appliqué à A , c-à-d vérifiant $Au_k = \lambda_k u_k$ pour tout k où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres.

Pour montrer que deux matrices sont égales, il suffit de montrer que leurs produits avec tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ coïncident. Comme $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une base, tout vecteur v se décompose sous la forme $v = \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k$. On calcule :

$$Av = \sum_{k=1}^n \alpha_k Au_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k u_k$$

et

$$\left(\sum_{l=1}^n \lambda_l u_l u_l^T \right) \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_l u_l u_l^T \alpha_k u_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k u_k u_k^T u_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k u_k,$$

où l'on a utilisé $u_l^T u_k = u_l \cdot u_k = 0$ pour $l \neq k$ et $u_k \cdot u_k = 1$. On obtient ainsi l'égalité des deux matrices A et $\left(\sum_{l=1}^n \lambda_l u_l u_l^T \right)$.

ii) Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$. Les vecteurs propres associés sont $u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. On a donc la décomposition

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T = 2 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 7

Chercher une décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes.

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$,

ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Sol.:

i) **Méthode 1.** On calcule : $A^T A = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de $A^T A$ sont 18, 0,

avec pour vecteurs propres normalisés associés $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\Sigma =$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{18} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (on ordonne les valeurs singulières dans l'ordre décroissant), et}$$

on obtient ainsi la matrice orthogonale V :

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice U s'obtient en normalisant les vecteurs Av_i avec v_i associé à une valeur singulière

non nulle, ici il y en a un seul : $Av_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Ainsi

$$u_1 := \frac{1}{\|Av_1\|} Av_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les autres colonnes de U s'obtiennent en étendant la famille $\{u_1\}$ à une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . Il faut donc trouver deux vecteurs normés u_2, u_3 orthogonaux solutions de l'équation $u_1 \cdot x = 0$. Une base de solution est

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On applique l'algorithme de Gram-Schmidt pour orthonormaliser la famille $\{w_1, w_2\}$. On obtient $u_2 = \frac{1}{\|w_1\|} w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w_2 - \frac{w_1 \cdot w_2}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, d'où en normalisant $u_3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On obtient ainsi la matrice $U = (u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}$. Finalement, la décomposition $A = U\Sigma V^T$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Remarque : il y a une infinité de solutions possibles pour u_2, u_3 .

Méthode 2. On souhaite calculer la décomposition en valeurs singulières de A qui a plus de lignes que de colonnes. Pour éviter de recourir à l'algorithme de Gram-Schmidt pour compléter la matrice U (voir Méthode 1), on peut calculer la décomposition en valeurs singulières de la matrice transposée $B = A^T = \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^T$, puis transposer la décomposition obtenue.

On calcule $B^T B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -4 & 8 & -8 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de B sont $18, 0, 0$ avec pour vecteurs propres associés $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$, en choisissant v_2, v_3 de sorte que $v_2 \cdot v_3 = 0$. Ainsi, $\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on obtient la matrice \tilde{V} en normalisant les vecteurs v_1, v_2, v_3 :

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Ensuite pour la matrice \tilde{U} , on normalise le vecteur Bv_1 associé à une valeur singulière non nulle. On obtient :

$$u_1 = \frac{1}{\|Bv_1\|} Bv_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

On obtient u_2 en prenant un vecteur unitaire orthogonale à u_1 : $u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ d'où

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

On aboutit à la décomposition en valeur singulière

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

d'où en transposant

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

ii) On calcule : $A^T A = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de $A^T A$ sont 25, 9, 0, avec pour

vecteurs propres normalisés associés $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{25} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{9} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (on ordonne les valeurs singulières dans l'ordre décroissant), et on obtient ainsi la matrice orthogonale V :

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

La matrice U s'obtient en normalisant les vecteurs Av_i avec v_i associé à une valeur singulière non nulle, ici : $Av_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Av_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi

$$u_1 = \frac{1}{\|Av_1\|} Av_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \frac{1}{\|Av_2\|} Av_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi la matrice $U = (u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Finalement, la décomposition $A = U\Sigma V^T$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

Soit A une matrice de taille $n \times n$.

- Montrer que A est inversible si et seulement si A possède n valeurs singulières non nulles.
- Si A est inversible et $U\Sigma V^T$ est une décomposition en valeurs singulières de A , donner une décomposition en valeurs singulières de A^{-1} .

Sol.:

- On a $A = U\Sigma V^T$ avec U, V des matrices orthogonales de taille $n \times n$ et Σ la matrice diagonale des valeurs singulières. On a $\det(A) = \det(U) \det(\Sigma) \det(V)$, avec $\det(U) \neq 0$ et $\det(V) \neq 0$ (car U et V sont inversibles), ainsi

$$\det(A) \neq 0 \iff \det(\Sigma) \neq 0$$

et A est inversible si et seulement si ses valeurs singulières sont non nulles.

- ii) On a $A = U\Sigma V^T$ avec U, V des matrices orthogonales de taille $n \times n$ et Σ la matrice diagonale des valeurs singulières, inversible d'après la question i). Ainsi, en inversant cette relation (on utilise $U^{-1} = U^T$ et $V^{-1} = V^T$), on obtient la décomposition en valeurs singulières cherchée $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$.

Exercice 9

Trouver une décomposition en valeurs singulières des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

- a) Pour la matrice A . Les valeurs propres de $A^T A$ sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 0$. On obtient $\sigma_1 = 2$ et $\sigma_2 = 0$. Les vecteurs propres associés aux valeurs propres sont

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite $A\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On cherche une base OG de \mathbb{R}^2 , on prend $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour compléter le vecteur $A\vec{v}_1$. On normalise et on obtient

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

et

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Pour la matrice B . On a $B^T B = \begin{pmatrix} 81 & -27 \\ -27 & 9 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 90$ et $\lambda_2 = 0$. On calcule les vecteurs propres \vec{v}_1, \vec{v}_2 , et on les normalise. On obtient la matrice V

$$V = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

On a

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule $B\vec{v}_1$ et $B\vec{v}_2$

$$B\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} \text{ et } B\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a que $\{B\vec{v}_1\}$ est une base de $\text{Im}(B)$. On doit la compléter avec deux vecteurs orthogonaux. Comme condition on a $\vec{w} \cdot B\vec{v}_1 = 0$ ce qui donne $x - 2y - 2z = 0$. On trouve

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux entre eux. On doit faire Gram-Schmidt. On obtient

$$U = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} \\ -2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{5} \\ -2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}$$

c) Pour la matrice C . On calcule $C^T C = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 2$. Les vecteurs propres de $C^T C$ correspondants sont

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a obtenu les colonnes de la matrice V . Pour la matrice U qui est 3×3 , il nous faut

$$C\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ et } C\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\{C\vec{v}_1, C\vec{v}_2\}$ est une base orthogonale de $\text{Im}(C)$. Mais il nous manque un vecteur orthogonal aux deux autres pour avoir une base OG de \mathbb{R}^3 . On sait que $\vec{w} \cdot C\vec{v}_1 = 0$ et $\vec{w} \cdot C\vec{v}_2 = 0$

On obtient un système à résoudre (si $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$)

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Un vecteur \vec{w} possible est $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ On a une base OG de \mathbb{R}^3 , que l'on normalise pour trouver les colonnes de U :

$$U = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Finalement la matrice Σ est

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercices additionnels

Exercice 10

Soit W le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer et décrire W^\perp .
2. Vérifier que $\dim(W) + \dim(W^\perp) = 4$.

Sol.: Comme vu au cours, un vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ appartient à W^\perp si et seulement si $\vec{v} \perp \vec{v}_1$ et $\vec{v} \perp \vec{v}_2$. On peut donc écrire

$$W^\perp = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^4 \mid \vec{v} \cdot \vec{v}_1 = 0, \vec{v} \cdot \vec{v}_2 = 0 \}.$$

En posant $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, les deux conditions impliquent que les $\vec{v} \in W^\perp$ sont les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 & = 0 \\ -x_1 & + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

On résout ce système pour trouver

$$W^\perp = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_3, x_4 \text{ libres} \right\}$$

Comme $\dim(W) = 2$ (car engendré par deux vecteurs indépendants) et $\dim(W^\perp)$ (car engendré par deux vecteurs indépendants), on a $\dim(W) + \dim(W^\perp) = 4$. On conclut que dans \mathbb{R}^4 , l'espace orthogonal à un plan est aussi un plan (alors que dans \mathbb{R}^3 , l'espace orthogonal à un plan est une droite).

Exercice 11

Soit $A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n)$ une matrice $m \times n$ dont les colonnes sont linéairement indépendantes. Soient $Q = (\vec{q}_1 \dots \vec{q}_n)$ et $R = (\vec{r}_1 \dots \vec{r}_n)$ les matrices obtenues de la factorisation QR .

- a) Montrer que $\vec{a}_i = r_{1i} \vec{q}_1 + r_{2i} \vec{q}_2 + \dots + r_{ii} \vec{q}_i$. On obtient que les colonnes de A sont des combinaisons linéaires des colonnes de Q avec comme coefficients les composantes de R .

(**Indication** : utilisez $\vec{a}_i = Q \vec{r}_i$)

- b) Trouver la factorisation QR de la matrice A ci-dessous, en utilisant le point précédent pour trouver la matrice R .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : pour trouver R on peut aussi utiliser $R = Q^T A$ mais ici vous voyez une manière alternative.

Sol.:

- a) On a $A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n) = QR = (Q\vec{r}_1 \dots Q\vec{r}_n)$ Ainsi $\vec{a}_i = Q\vec{r}_i$. Comme la matrice R est triangulaire supérieure, on a

$$\vec{r}_i = \begin{pmatrix} r_{1i} \\ r_{2i} \\ \vdots \\ r_{ii} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $Q\vec{r}_1 = r_{11}\vec{q}_1 + 0\vec{q}_2 + 0\vec{q}_3$ et $Q\vec{r}_2 = r_{12}\vec{q}_1 + r_{22}\vec{q}_2 + 0\vec{q}_3$. On obtient alors

$$\vec{a}_i = r_{1i}\vec{q}_1 + r_{2i}\vec{q}_2 + \dots r_{ii}\vec{q}_i$$

- b) On trouve la matrice Q en appliquant Gram-Schmidt sur les colonnes de A . On obtient

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Clairement $\vec{a}_1 = \sqrt{2}\vec{q}_1$, ainsi $r_{11} = \sqrt{2}$. Pour trouver r_{12} et r_{22} on doit résoudre

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = r_{12} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + r_{22} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on obtient $r_{12} = \sqrt{2}/2 = r_{22}$. On procède de la même manière pour trouver r_{13}, r_{23} et r_{33} . On a

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$