

Série 13 (Corrigé)

Cette série suit le chapitre 6 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *orthogonalité, moindres carrés, QR*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser les bases de sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n suivantes.

L'exercice ne vous demande que de calculer une base orthogonale (pas nécessairement orthonormée) et c'est aussi ce que le solutionnaire vous propose. Vous pouvez bien sûr calculer une base orthonormée (car elle est orthogonale en particulier). Ceci a l'avantage d'également révéler la factorisation QR comme vu en classe.

a) $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ base d'un s.e.v. de \mathbb{R}^3 , avec $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ base d'un s.e.v. de \mathbb{R}^4 , avec $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Donner une base orthonormale pour a) et b).

Sol.:

a) La méthode de Gram-Schmidt donne $\vec{u}_1 = \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\vec{u}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

b) La méthode de Gram-Schmidt donne $\vec{u}_1 = \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\vec{u}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{u}_3 = \vec{w}_3 - \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 - \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ -2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}.$$

c) Pour a) : $\vec{u}_1 / \|\vec{u}_1\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 / \|\vec{u}_2\| = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pour b) : $\vec{u}_1 / \|\vec{u}_1\| = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 / \|\vec{u}_2\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 / \|\vec{u}_3\| = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

- Montrer que si Q est une matrice orthogonale, alors Q^T est aussi une matrice orthogonale.
- Montrer que si U, V sont des matrices $n \times n$ orthogonales, alors UV est aussi une matrice orthogonale.
- Soit \vec{u} un vecteur unitaire de \mathbb{R}^n ($\|\vec{u}\| = 1$). Montrer que la matrice $Q = I_n - 2\vec{u}\vec{u}^T$ est orthogonale.
- Montrer que toute valeur propre réelle λ d'une matrice orthogonale Q vérifie $\lambda = \pm 1$.
- Soit Q une matrice orthogonale de taille $n \times n$. Soit $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ une base orthogonale de \mathbb{R}^n . Montrer que $\{Q\vec{u}_1, \dots, Q\vec{u}_n\}$ est aussi une base orthogonale de \mathbb{R}^n .

Sol.:

- Par définition, une matrice orthogonale Q de taille $n \times n$ vérifie $Q^T Q = I_n$ et $Q Q^T = I_n$. Comme $Q = (Q^T)^T$, on a $Q^T (Q^T)^T = I_n$ et $(Q^T)^T Q^T = I_n$, ce qui montre que Q^T est aussi orthogonale.
- En utilisant $VV^T = UU^T = I_n$, on a $UV (UV)^T = UVV^T U^T = UU^T = I_n$. De même, on peut vérifier que $(UV)^T UV = I_n$, donc UV est une matrice orthogonale.
- On doit montrer $Q^T Q = I_n$.

Méthode 1 : En travaillant avec des indices, on a

$$\begin{aligned} (Q^T Q)_{ij} &= \sum_{k=1}^n q_{ki} q_{kj} = \sum_{k=1}^n (\delta_{ki} - 2u_k u_i) (\delta_{kj} - 2u_k u_j) \\ &= \delta_{ij} + \sum_{k=1}^n (-\delta_{ki} 2u_k u_j - 2\delta_{kj} u_k u_i + 4u_i u_j u_k^2), \end{aligned}$$

avec $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon. En utilisant $\sum_{k=1}^n u_k^2 = 1$, on obtient $Q^T Q = I_n$.

Méthode 2 : On calcule matriciellement : $Q^T = (I_n - 2\vec{u}\vec{u}^T)^T = I_n - 2(\vec{u}^T)^T \vec{u}^T = Q$, ensuite,

$$Q^T Q = (I_n - 2\vec{u}\vec{u}^T)(I_n - 2\vec{u}\vec{u}^T) = I_n - 2\vec{u}\vec{u}^T - 2\vec{u}\vec{u}^T + 4\vec{u}(\vec{u}^T \vec{u})\vec{u}^T = I_n - 4\vec{u}\vec{u}^T + 4\vec{u}\vec{u}^T = I_n,$$

où l'on a utilisé $\vec{u}^T \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 1$.

Remarque : de telles matrices orthogonales s'appellent réflexions de Householder.

- d) La matrice orthogonale conserve la norme de tout vecteur \vec{x} : $\|Q\vec{x}\|^2 = (Q\vec{x})^T(Q\vec{x}) = \vec{x}^T Q^T Q \vec{x} = \vec{x}^T \vec{x} = \|\vec{x}\|^2$. Ensuite, si $\vec{x} \neq \vec{0}$ est un vecteur propre associé à λ , on a $\|\vec{x}\| = \|Q\vec{x}\| = \|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$. Comme $\|\vec{x}\| \neq 0$, on obtient $|\lambda| = 1$, ainsi $\lambda = \pm 1$.
- e) On calcule pour tous i, j :

$$Q\vec{u}_i \cdot Q\vec{u}_j = (Q\vec{u}_i)^T Q\vec{u}_j = \vec{u}_i^T Q^T Q \vec{u}_j = \vec{u}_i^T \vec{u}_j = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j.$$

Comme les \vec{u}_i sont orthogonaux entre eux, ceci montre que la famille $\{Q\vec{u}_1, \dots, Q\vec{u}_n\}$ est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls (de normes $\|Q\vec{u}_i\| = \|\vec{u}_i\|$).

Il reste à montrer que $\{Q\vec{u}_1, \dots, Q\vec{u}_n\}$ est une base.

Méthode 1 : Comme Q est inversible (d'inverse Q^T), Q transforme les bases en bases, donc $\{Q\vec{u}_1, \dots, Q\vec{u}_n\}$ est une base.

Méthode 2 : Comme la famille $\{Q\vec{u}_1, \dots, Q\vec{u}_n\}$ est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls, elle est automatiquement linéairement indépendante. Comme elle comporte n vecteurs, c'est une base de \mathbb{R}^n .

Remarque : si $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ est une base orthonormée, alors $\|Q\vec{u}_i\| = 1$, et $\{Q\vec{u}_1, \dots, Q\vec{u}_n\}$ est aussi une base orthonormée.

Exercice 3

Soient les vecteurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Par "meilleure approximation", on veut dire "le vecteur le plus proche". La distance entre le vecteur et sa meilleure approximation (= sa projection orthogonale) dans un sous-espace est ce qu'on appelle la distance entre le vecteur et le sous-espace. Il existe de nombreuses façon de calculer cette meilleure approximation : commencez avec l'approche basique comme vue en classe. Plus tard, on verra aussi des façons de procéder via moindres carrés (les équations normales) et Gram-Schmidt : cela est aussi expliqué dans les solutions, mais vous pouvez revisiter cela plus tard, quand on en aura parlé en classe.

- a) Trouver la meilleure approximation de \vec{v} par un vecteur de la forme $\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2$.
- b) Calculer la distance entre \vec{v} et $\text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$.

Soient maintenant les vecteurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- c) Trouver la meilleure approximation de \vec{v} par un vecteur de la forme $\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2$.
- d) Calculer la distance entre \vec{v} et $\text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$.

Sol.:

- a) Soit $W = \text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$. La meilleure approximation $\vec{w} = \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2$ de \vec{v} correspond à la projection orthogonale $\vec{p}_W(\vec{v})$. **Attention**, ici \vec{w}_1 et \vec{w}_2 ne sont pas orthogonaux ($\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 \neq 0$).

Méthode 1 : La projection orthogonale est déterminée par $\vec{w} \in W$ et $\vec{v} - \vec{w} \in W^\perp$:

$$\begin{cases} (\vec{w} - \vec{v}) \cdot \vec{w}_1 = 0 \\ (\vec{w} - \vec{v}) \cdot \vec{w}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_1 = \vec{v} \cdot \vec{w}_1 \\ \alpha\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 + \beta\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2 = \vec{v} \cdot \vec{w}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\alpha + 6\beta = 4 \\ 6\alpha + 6\beta = 5 \end{cases} .$$

La solution est $\alpha = -1/2, \beta = 4/3$. Par conséquent, $\vec{w} = -\frac{1}{2}\vec{w}_1 + \frac{4}{3}\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$.

Méthode 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. On doit trouver la meilleure approximation de \vec{v} sous la forme $A\vec{x}$, où $\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. L'équation normale pour la solution au sens des moindres carrés de $A\vec{x} = \vec{v}$ est

$$A^T A \vec{x} = A^T \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\alpha + 6\beta = 4 \\ 6\alpha + 6\beta = 5 \end{cases} .$$

On conclut comme dans la méthode 1.

Méthode 3 : On applique la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser la famille

$\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$. On pose $\vec{u}_1 = \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. La famille

$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ forme alors une base orthogonale de W . On a ainsi $\vec{p}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 +$

$\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$. Puisque \vec{w}_1 et \vec{w}_2 ne sont pas orthogonaux, cette méthode ne permet

pas directement de trouver les coefficients α et β , il faut résoudre le système supplémentaire

$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \vec{p}_W(\vec{v})$. On retrouve le même résultat.

b) $\|\vec{v} - \vec{p}_W(\vec{v})\| = \left\| \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

- c) On pose à nouveau $W = \text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$. On remarque que les vecteurs \vec{w}_1 et \vec{w}_2 sont orthogonaux. On peut ainsi facilement calculer la projection orthogonale.

$\vec{p}_W(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$. Puisque les vecteurs \vec{w}_1 et \vec{w}_2 sont ici orthogonaux, le calcul de

la projection orthogonale fournit directement les coefficients α et β . On trouve $\alpha = 1/2$ et $\beta = 0$.

d) $\|\vec{v} - \vec{p}_W(\vec{v})\| = \sqrt{\frac{35}{2}}$.

Exercice 4

Calculer la décomposition QR des matrices suivantes.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

a) On applique la méthode de Gram-Schmidt aux vecteurs $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis

on les normalise. On obtient $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$, d'où $Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$,

et $R = Q^T A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{b) } Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 5/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{6}/3 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \\ 0 & -2/\sqrt{22} \\ -1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{11/2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

Soit U un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ une base orthogonale de U . On considère la transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $T(\vec{v}) = \text{proj}_U(\vec{v})$. Montrer que T est une transformation linéaire.

Indication : utiliser la définition de la projection orthogonale.

Sol.: Méthode 1 :

$$\begin{aligned} T(\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) &= \frac{(\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \dots + \frac{(\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) \cdot \vec{u}_p}{\vec{u}_p \cdot \vec{u}_p} \vec{u}_p \\ &= \alpha \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \beta \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \dots + \alpha \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_p}{\vec{u}_p \cdot \vec{u}_p} \vec{u}_p + \beta \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_p}{\vec{u}_p \cdot \vec{u}_p} \vec{u}_p = \alpha \vec{T}(\vec{v}) + \beta \vec{T}(\vec{w}). \end{aligned}$$

Méthode 2 : En utilisant l'identité $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y} = \vec{y}^T \vec{x}$, on a

$$\begin{aligned} T(\vec{v}) &= \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \dots + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_p}{\vec{u}_p \cdot \vec{u}_p} \vec{u}_p = \vec{u}_1 \vec{u}_1^T (\vec{u}_1^T \vec{u}_1)^{-1} \vec{v} + \dots + \vec{u}_p \vec{u}_p^T (\vec{u}_p^T \vec{u}_p)^{-1} \vec{v} \\ &= \left(\vec{u}_1 \vec{u}_1^T (\vec{u}_1^T \vec{u}_1)^{-1} + \dots + \vec{u}_p \vec{u}_p^T (\vec{u}_p^T \vec{u}_p)^{-1} \right) \vec{v}. \end{aligned}$$

Ainsi, la transformation T est associée à la matrice de taille $n \times n$ définie par $\vec{u}_1 \vec{u}_1^T (\vec{u}_1^T \vec{u}_1)^{-1} + \dots + \vec{u}_p \vec{u}_p^T (\vec{u}_p^T \vec{u}_p)^{-1}$ et est donc linéaire.

Exercice 6

Déterminer la solution au sens des moindres carrés de $A\vec{x} = \vec{b}$

a) en utilisant l'équation normale lorsque

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \text{ii)} \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \text{iii)} \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

b) en utilisant la méthode QR lorsque

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \text{ii)} \quad A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sol.:

a) en utilisant l'équation normale.

$$\text{i)} \quad \text{L'équation normale } A^T A \vec{x} = A^T \vec{b} \text{ est } \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$\text{elle a pour solution } \vec{x} = \begin{pmatrix} 5/14 \\ 5/7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{ii)} \quad A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}, \quad A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{iii)} \quad A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}.$$

b) en utilisant la méthode QR.

- i) Les colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes, donc décomposer A selon $A = QR$ et résoudre $R\vec{x} = Q^T\vec{b}$ est équivalent à résoudre l'équation normale. La décomposition est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \\ 0 & -2/\sqrt{22} \\ -1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{11/2} \end{pmatrix}.$$

L'approximation \vec{x} au sens des moindres carrés est la solution du système $R\vec{x} = Q^T\vec{b}$, où $Q^T\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/\sqrt{22} \end{pmatrix}$. Ainsi, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1/11 \\ -2/11 \end{pmatrix}$.

- ii) Ici de même, les colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes, donc décomposer A selon $A = QR$ et résoudre $R\vec{x} = Q^T\vec{b}$ est équivalent à résoudre l'équation normale. La décomposition a également été calculée à l'exercice 4 (question a)) et est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve $Q^T\vec{b} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 11/9 \\ -2/3 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Les données suivantes décrivent le potentiel dans un câble électrique en fonction de la température du câble.

i	T_i [$^{\circ}C$]	U_i [V]
1	0	-2
2	5	-1
3	10	0
4	15	1
5	20	2
6	25	4

On suppose que le potentiel suit la loi $U = a + bT + cT^2$. Calculer a, b, c au sens des moindres carrés.

Sol.: Le système linéaire s'écrit

$$\vec{U} = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

avec $\vec{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_6 \end{pmatrix}$ et A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & T_1 & T_1^2 \\ 1 & \vdots & \vdots \\ 1 & & \\ 1 & & \\ 1 & \vdots & \vdots \\ 1 & T_6 & T_6^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 10 & 100 \\ 1 & 15 & 225 \\ 1 & 20 & 400 \\ 1 & 25 & 625 \end{pmatrix}.$$

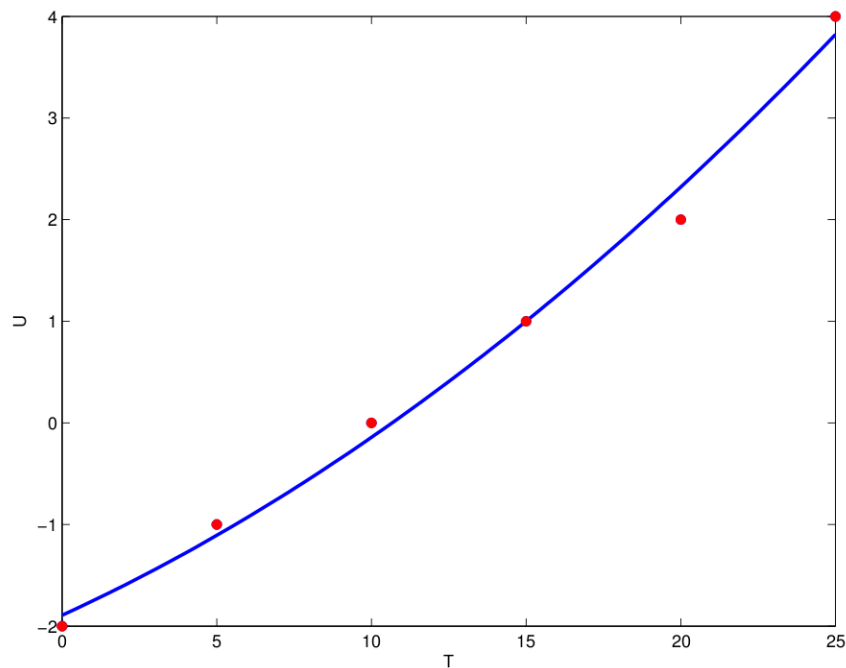
Pour résoudre ce système et trouver a, b, c au sens des moindres carrés, on considère l'équation normale

$$A^T \vec{U} = A^T A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On trouve

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-53}{28} \\ \frac{39}{280} \\ \frac{1}{280} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.89 \\ 0.139 \\ 0.00357 \end{pmatrix}.$$

Le graphique suivant montre les données (en rouge) et la courbe d'interpolation (bleue) obtenue au sens des moindres carrés.



Exercice 8

On considère les points

x_i	2	5	6	8
y_i	1	2	3	3

On suppose que la relation entre les x_i et les y_i suit une loi $y = ax + b$. Calculer a et b au sens des moindres carrés.

Sol.: Le système linéaire correspondant est $\vec{y} = A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où A est donnée par $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$, et $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. L'équation normale correspondante est $A^T A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^T \vec{y}$. On obtient la solution $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} \\ \frac{9}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.36 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- Une base d'un sous-espace vectoriel W de \mathbb{R}^n qui est un ensemble de vecteurs orthogonaux est appelée une base orthonormale.
- Un ensemble $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ orthogonal de vecteurs non nuls de \mathbb{R}^n est linéairement indépendant et de ce fait est une base du sous-espace qu'il engendre.
- Une base orthonormale est une base orthogonale mais la réciproque est fautive en général.
- Si \vec{x} n'appartient pas au sous-espace vectoriel W , alors $\vec{x} - \vec{p}_W(\vec{x})$ n'est pas nul (ici $\vec{p}_W(\vec{x})$ désigne la projection orthogonale de \vec{x} sur W).

Sol.: Vrai : b), c), d). Faux : a).

- Faux, il manque la condition que les vecteurs de base doivent être de norme égale à 1.
- Vrai. En effet, soient $u, v \neq 0$ et montrons que si u est orthogonal à v alors les vecteurs u et v sont linéairement indépendants. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda u + \mu v = 0$ et supposons que $\langle u, v \rangle = 0$. On a que $\langle \lambda u + \mu v, v \rangle = 0$ et donc, par les propriétés du produit scalaire on trouve $\lambda \langle u, v \rangle + \mu \langle v, v \rangle = 0$. Comme $\langle u, v \rangle = 0$ par hypothèse on trouve que $\mu \langle v, v \rangle = 0$ et puisque $v \neq 0$ on a que $\langle v, v \rangle \neq 0$ donc $\mu = 0$. De même on trouve que $\lambda = 0$ et donc u et v sont linéairement indépendants.
- Vrai, par définition toute base orthonormale est formée de vecteurs orthogonaux. Par contre la base $\{2e_1, 2e_2\}$ de \mathbb{R}^2 est orthogonale mais pas orthonormale.
- Vrai. Si $\vec{x} \notin W$, alors $\vec{x} \neq \vec{p}_W(\vec{x})$ car $\vec{p}_W(\vec{x}) \in W$ par définition et donc $\vec{x} - \vec{p}_W(\vec{x}) \neq 0$.

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- Soit A une matrice $n \times n$ qui peut se factoriser selon la factorisation QR comme $A = QR$. Alors, $Q^T A = R$.
- Soit W un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Soit \hat{y} la projection orthogonale de $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ sur W . Alors \hat{y} dépend du choix de la base de W .
- Soit W un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, tel que $W = \text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$. Si $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ satisfait $\vec{z} \perp \vec{w}_1$ et $\vec{z} \perp \vec{w}_2$, alors $\vec{z} \in W^\perp$.

- d) Soit W un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Si $\vec{y} \in W$, alors sa projection orthogonale sur W est $\vec{p}_W(\vec{y}) = \vec{y}$.

Sol.: Vrai : a), c), d). Faux : b).

- a) Vrai. Si $A = QR$ avec Q orthogonale alors $QQ^T = Q^TQ = I_n$ et donc $Q^T A = Q^T QR = I_n R = R$.
- b) Faux. Par définition $\vec{p}_W(\vec{y})$ est le vecteur de W qui est le plus proche de y (selon la distance euclidienne), il ne dépend donc pas de la base de W choisie.
- c) Vrai. Soit $W = \text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ et soit $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\vec{z} \perp \vec{w}_1$ et $\vec{z} \perp \vec{w}_2$. Montrons que $\vec{z} \in W^\perp$. Soit $\vec{w} \in W$, il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{w} = \lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2$ donc $\langle \vec{z}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{z}, \lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2 \rangle = \lambda_1 \langle \vec{z}, \vec{w}_1 \rangle + \lambda_2 \langle \vec{z}, \vec{w}_2 \rangle = 0$.
- d) Vrai. Par définition $\vec{p}_W(\vec{y})$ est le vecteur de W le plus proche de \vec{y} (pour la distance euclidienne). Si $\vec{y} \in W$ on a donc $\vec{p}_W(\vec{y}) = \vec{y}$.

Exercices additionnels

Exercice 11

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Les colonnes d'une matrice A sont linéairement indépendantes si l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ admet la solution triviale.
- b) Si A possède des colonnes linéairement dépendantes, alors l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ admet une solution non triviale.
- c) Les colonnes de toute matrice de taille 4×5 sont linéairement dépendantes.
- d) Si le vecteur nul est l'un des vecteurs d'une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$, alors ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Sol.:

- a) Faux. Toute équation homogène admet la solution triviale, on ne peut donc rien dire à propos des colonnes de A . L'assertion serait vraie si l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ admettait **uniquement** la solution triviale.
- b) Vrai. Si A possède des colonnes linéairement dépendantes, cela signifie qu'il existe des nombres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tels que $\lambda_1 \vec{c}_1 + \dots + \lambda_n \vec{c}_n = \vec{0}$ où $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n$ sont les n colonnes de A . Le vecteur $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est alors une solution non triviale de l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$.
- c) Vrai. Plus généralement, une matrice de taille $m \times n$ avec $m < n$ (plus de colonnes que de lignes) possède des colonnes linéairement dépendantes. Cela vient du fait que le nombre de lignes linéairement indépendantes d'une matrice A est égal au nombre de colonnes linéairement indépendantes de A (on dit que le rang-ligne de A est égal au rang-colonne de A). Ainsi, A possède au maximum m lignes linéairement indépendantes et donc au maximum m colonnes linéairement indépendantes. Comme $n > m$ on en déduit que les n colonnes de A doivent être linéairement dépendantes.

- d) Faux. Si le vecteur nul est l'un des vecteurs d'une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$, disons $\vec{0} = \vec{v}_k$ pour un certain $1 \leq k \leq p$ alors la combinaison linéaire $0 \cdot \vec{v}_1 + \dots + 1 \cdot \vec{v}_k + \dots + 0 \cdot \vec{v}_p$ est égale au vecteur nul $\vec{0}$ et donc ces vecteurs sont linéairement dépendants.

Exercice 12

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Un système d'équations linéaires à trois équations et cinq inconnues est forcément consistant.
- b) Tout système d'équations linéaires à trois équations et deux inconnues est inconsistant.
- c) Si la matrice échelonnée-réduite associée à la matrice augmentée d'un système d'équations linéaires possède une ligne formée de zéros, alors le système possède une infinité de solutions.

Sol.:

- a) C'est faux. Considérons par exemple les trois équations $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$, $x_1 = 0$ et $x_1 = 1$. Le système formé de ces trois équations à 5 inconnues n'a visiblement aucune solution.
- b) C'est faux. Par exemple le système à 2 inconnues et avec les trois équations $x_1 + x_2 = 1$, $2x_1 + 2x_2 = 2$ et $3x_1 + 3x_2 = 3$ est consistant (les deux dernières équations sont multiples de la première, qui admet des solutions).
- c) C'est faux. Le système peut ne pas avoir de solution comme par exemple celui, à deux variables, dont la matrice échelonnée-réduite associée à la matrice augmentée est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
En effet ici on a $0 \cdot x_2 = 1$ ce qui est impossible.

Exercice 13

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Une matrice A de taille $m \times n$ ne peut être multipliée par la gauche que par des matrices B de taille $p \times m$.
- b) Le produit matriciel est commutatif.
- c) Si le produit de deux matrices A et B est $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.
- d) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$.

Sol.:

- a) Vrai. C'est la définition du produit matriciel.
- b) Faux. Prenons par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule et on trouve $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ tandis que $BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $AB \neq BA$.

- c) Faux. Prenons $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B$. On a que $A^2 = AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mais $A \neq 0$ (c'est-à-dire A n'est pas la matrice nulle).
- d) Vrai. Cela découle de la formule $(AB)^T = B^T A^T$ vue à l'exercice ?? et de l'associativité du produit matriciel. En effet $(ABC)^T = ((AB)C)^T = C^T (AB)^T = C^T B^T A^T$.

Exercice 14

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Si une matrice A est triangulaire inférieure, alors son déterminant s'obtient comme le produit des éléments de sa diagonale.
- b) $\det A^T = -\det A$ pour toute matrice carrée A .
- c) Il se peut que l'inverse d'une matrice A existe même si $\det A = 0$.
- d) Soient A une matrice $n \times n$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors, $\det(kA) = k^n \det A$.

Sol.:

- a) Vrai. Si une matrice A est triangulaire inférieure, alors en développant successivement par rapport à la 1ère ligne, 2ème, jusqu'à la n -ème on obtient bien le produit des éléments de sa diagonale.
- b) Faux. D'après un théorème on a que $\det A^T = \det A$ pour toute matrice carrée A .
- c) Faux. Par un théorème du cours, A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
- d) Vrai. Soient A une matrice $n \times n$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors, $\det(kA) = k^n \det A$. En effet, la matrice kA s'obtient en multipliant chaque ligne de A par le nombre k . Puisqu'il y a n lignes on aura donc multiplié le déterminant de A par $\underbrace{k \cdot \dots \cdot k}_{n \text{ fois}} = k^n$.

Exercice 15

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Le plan défini dans \mathbb{R}^3 par $z = 2$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
- b) $\text{Ker}(A) = \{\vec{0}\}$ si et seulement si l'application $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est surjective.
- c) Soit V un espace vectoriel et $u \in V$. Alors l'opposé $-u$ de u est unique et $-u = (-1)u \in V$.
- d) Soit A une matrice de taille $m \times n$, alors $\text{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Sol.: Vrai : (c), (d). Faux : (a), (b).

- a) Faux. En effet le vecteur nul n'appartient pas à ce plan.
- b) Faux. On a que $\text{Ker}(A) = \{\vec{0}\}$ si et seulement si l'application $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est injective et non pas surjective

- c) Vrai. Supposons qu'il existe $u', u'' \in V$ tels que $u + u' = 0 = u' + u$ et $u + u'' = 0 = u'' + u$. On a alors que $u' = u' + 0 = u' + (u + u'') = (u' + u) + u'' = 0 + u'' = u''$. Donc l'opposé de u est unique, et on le note $-u$. Dès lors, par les propriétés d'espace vectoriel on a $(-1)u + u = (-1)u + 1u = (-1 + 1)u = 0u = 0$. Par unicité de l'opposé on obtient que $(-1)u = -u$.
- d) Vrai. En effet, si $u, v \in \text{Ker}(A)$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $A(u + \lambda v) = Au + \lambda Av = 0$ et donc $u + \lambda v \in \text{Ker}(A)$.

Exercice 16

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) La matrice A n'est pas inversible si et seulement si 0 est une valeur propre de A .
- b) Une matrice A carrée est inversible si et seulement si elle est diagonalisable.
- c) Les valeurs propres d'une matrice carrée sont sur sa diagonale.
- d) On trouve les valeurs propres de A en réduisant la matrice à sa forme échelonnée.

Sol.: Vrai : a). Faux : b), c), d).

- a) Vrai. Supposons A de taille $n \times n$. Alors 0 est valeur propre de A si et seulement s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ avec $x_0 \neq 0$ tel que $Ax_0 = 0$. Ceci est équivalent à dire que $\text{Ker}(A) \neq 0$, c'est-à-dire A n'est pas injective ce qui est équivalent à non inversible puisque A est carrée.
- b) Faux. Prenons $A = 0$ la matrice nulle. Alors A est diagonale (donc diagonalisable) mais pas inversible.
- c) Faux. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors 0 et 2 sont ses valeurs propres mais ces valeurs ne se trouvent pas sur la diagonale.
- d) Faux. Dans l'exemple ci-dessus la forme échelonnée réduite de A est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais la valeur propre 2 de A n'apparaît pas dans celle-ci.

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, José Luis Zuleta,...). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.