

Série 12 (Corrigé)

Cette série suit le chapitre 6 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *orthogonalité*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Existe-t-il une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $b \neq 0$, diagonalisable et ne possédant qu'une seule valeur propre de multiplicité 2 ?

Sol.: Non. En effet, soit A une matrice diagonalisable avec une seule valeur propre λ de multiplicité 2. Diagonalisons la matrice : il existe P inversible telle que

$$A = PDP^{-1}$$

avec $D = \lambda I_2$. On déduit $A = \lambda P I_2 P^{-1} = \lambda P P^{-1} = \lambda I_2$. La matrice A est donc proportionnelle à la matrice identité, elle ne peut pas être de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $b \neq 0$.

Exercice 2

- a) Montrer que si λ est une valeur propre d'une matrice inversible A de taille $n \times n$, alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1} . Trouver un vecteur propre correspondant.
- b) Montrer que A et A^T ont les mêmes valeurs propres. Montrer par un contre-exemple que les vecteurs propres de A et A^T ne sont pas les mêmes en général.

Sol.:

- a) Si \vec{v} est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ , on a

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

La valeur propre λ est non nulle car la matrice A est inversible. On multiplie à gauche par $\lambda^{-1}A^{-1}$, et on obtient

$$\lambda^{-1}\vec{v} = A^{-1}\vec{v},$$

d'où le résultat.

- b) Le déterminant de la matrice $A - \lambda I_n$ étant égal au déterminant de la transposée $(A - \lambda I_n)^T = A^T - \lambda I_n$, les matrices A et A^T ont donc le même polynôme caractéristique, et donc les mêmes valeurs propres (qui sont les racines du polynôme caractéristique).

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ et les vecteurs propres associés sont $\vec{v}_1 = (2 \ 1)^T, \vec{v}_2 = (-2 \ 1)^T$. Par contre les vecteurs propres correspondants de la matrice A^T sont $\vec{v}_1 = (1 \ 2)^T, \vec{v}_2 = (-1 \ 2)^T$.

Remarque : bien sûr, si A est symétrique, les vecteurs propres de A et A^T sont les mêmes.

Exercice 3

Soit A une matrice réelle de taille $n \times n$. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A , alors $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ est aussi une valeur propre de A .

Sol.: Soit $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé à λ . Alors

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow \overline{Ax} = \overline{\lambda x} \Leftrightarrow A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}.$$

Donc $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A .

Exercice 4

Soit A une matrice de taille $m \times n$.

- Montrer que $\text{Ker} A = \text{Ker}(A^T A)$.
- Montrer que $A^T A$ est inversible si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Sol.:

- Si $A\vec{x} = \vec{0}$, alors $A^T A\vec{x} = \vec{0}$, ce qui montre $\text{Ker} A \subset \text{Ker}(A^T A)$. Soit maintenant \vec{x} tel que $A^T A\vec{x} = \vec{0}$, alors $\vec{x}^T A^T A\vec{x} = 0$. Or, $\vec{x}^T A^T A\vec{x} = (A\vec{x})^T (A\vec{x}) = \|A\vec{x}\|^2$. Ainsi, $A\vec{x} = \vec{0}$, et $\text{Ker}(A^T A) \subset \text{Ker} A$. D'où l'égalité.
- Les colonnes de $A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n)$ sont linéairement indépendantes

$$\Leftrightarrow (\beta_1 \vec{a}_1 + \dots + \beta_n \vec{a}_n = \vec{0} \Rightarrow \beta_1 = \dots = \beta_n = 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \vec{0} \right)$$

$$\Leftrightarrow \text{Ker} A = \{ \vec{0} \}.$$

Ainsi, d'après a), les colonnes de A sont linéairement indépendantes si et seulement si $\text{Ker}(A^T A) = \{ \vec{0} \}$, c'est-à-dire la matrice (carrée) $A^T A$ est inversible.

Exercice 5

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 défini par

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 4u_1v_1 + 5u_2v_2.$$

Soient $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Calculez $\|\vec{v}_1\|$ et $\|\vec{v}_2\|$, ainsi que $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$

Sol.: On obtient $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{24}$ et $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{120}$, et $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$

Exercice 6

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta,$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs à l'origine.

Indication utiliser la loi des cosinus : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$ où a, b, c sont les longueurs des cotés d'un triangle et γ est l'angle opposé au côté de longueur c .

Sol.: On applique la loi des cosinus

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

On développe la norme de gauche

$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

On obtient alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

Exercice 7

Soit A une matrice $n \times n$ inversible. Montrer que la formule $(\vec{u} | \vec{v}) = (A\vec{u}) \cdot (A\vec{v}) = \vec{u}^T A^T A \vec{v}$ définit un produit scalaire dans \mathbb{R}^n .

Sol.: On doit vérifier les quatre axiomes :

1. *symétrie* : $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$. On a $(\vec{u} | \vec{v}) = (A\vec{u}) \cdot (A\vec{v}) = (A\vec{v}) \cdot (A\vec{u}) = (\vec{v} | \vec{u})$.
2. *linéarité* : $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$. On a $(\vec{u} + \vec{v} | \vec{w}) = (A(\vec{u} + \vec{v})) \cdot (A\vec{w}) = (A\vec{u}) \cdot (A\vec{w}) + (A\vec{v}) \cdot (A\vec{w}) = (\vec{u} | \vec{w}) + (\vec{v} | \vec{w})$.
3. *linéarité* : $\langle \alpha \vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$. On a $(\alpha \vec{u} | \vec{v}) = (A\alpha \vec{u}) \cdot (A\vec{v}) = \alpha (A\vec{u}) \cdot (A\vec{v}) = \alpha (\vec{u} | \vec{v})$.
4. *définie positivité* : $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ et $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ ssi $\vec{u} = \vec{0}$. On a $(\vec{u} | \vec{u}) = (A\vec{u}) \cdot (A\vec{u}) = \|A\vec{u}\|^2 \geq 0$ où $\|\cdot\|$ correspond à la norme euclidienne. Comme A est inversible, on obtient le résultat.

Exercice 8

- a) Trouver un vecteur non nul orthogonal à $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$\vec{u} \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} \cdot \vec{w}, \quad \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|}, \quad \frac{1}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w}, \quad \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|} \vec{v}.$$

c) Calculer la distance entre \vec{u} et \vec{v} et la distance entre \vec{u} et \vec{w} .

d) Calculer les vecteurs unitaires correspondant à \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} (pointant dans la même direction que le vecteur original).

Sol.:

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ car $\vec{z} \cdot \vec{x} = 0$.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 10$, $\frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|} = \frac{39}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w} = \frac{1}{61} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|} \vec{v} = \frac{39}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{17}$, $\|\vec{u} - \vec{w}\| = 3$.

d) $\vec{\hat{u}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{\hat{v}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{\hat{w}} = \frac{1}{\sqrt{61}} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner l'ensemble W des vecteurs orthogonaux à \vec{v} . Est-ce un espace vectoriel? Si oui, de quelle dimension?

Sol.: $W = \left\{ \vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid \vec{v} \cdot \vec{w} = 3a + 2b + c = 0 \right\}$.

W est en fait le noyau de l'application linéaire $\vec{w} \mapsto \vec{v} \cdot \vec{w}$ de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} , et donc c'est un espace vectoriel. Cette application est non nulle (par exemple $\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$) donc de rang 1. Par le théorème du rang, la dimension de W est donc $3 - 1 = 2$, il s'agit d'un plan (appelé le plan orthogonal au vecteur \vec{v}).

Exercice 10

Soient $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ et $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ deux bases orthonormales de \mathbb{R}^n . On définit les matrices de taille $n \times n$, $U = (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n)$ et $V = (\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n)$. Montrer que $U^T U = I_n$, $V^T V = I_n$ et que UV est inversible.

Sol.:

$$\begin{aligned}
 U^T U &= \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vec{u}_2^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \vec{u}_1 & \vec{u}_1^T \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_1^T \vec{u}_n \\ \vec{u}_2^T \vec{u}_1 & \vec{u}_2^T \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_2^T \vec{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{u}_n^T \vec{u}_1 & \vec{u}_n^T \vec{u}_2 & \cdots & \vec{u}_n^T \vec{u}_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n.
 \end{aligned}$$

Comme $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ vérifient les mêmes hypothèses, on a également $V^T V = I_n$.
 UV est inversible car $V^T U^T UV = V^T V = I_n$, d'où $(UV)^{-1} = V^T U^T$.

Exercice 11

Soient $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- Vérifier que \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont orthogonaux.
- Calculer la projection orthogonale $\vec{p}_W(\vec{v})$ de \vec{v} sur $W = \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.
- Donner la décomposition $\vec{v} = \vec{z} + \vec{p}_W(\vec{v})$, où $\vec{z} \in W^\perp$.

Même question pour $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Même question pour $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sol.:

- Un calcul direct donne $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$.
-

$$\vec{p}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 = \frac{6}{3} \vec{u}_1 + \frac{-3}{2} \vec{u}_2 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- $\vec{v} = \vec{z} + \vec{p}_W(\vec{v})$, où $\vec{p}_W(\vec{v})$ est calculé dans b), et \vec{z} est donné par $\vec{z} = \vec{v} - \vec{p}_W(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : on peut vérifier que $\vec{z} \cdot \vec{u}_1 = \vec{z} \cdot \vec{u}_2 = 0$, c'est-à-dire $\vec{z} \in W^\perp$.

Même question pour $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sont orthogonaux : $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 0$.

b)

$$\vec{p}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_3}{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3} \vec{u}_3 = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) $\vec{z} = \vec{v} - \vec{p}_W(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque : $\vec{v} = \vec{p}_W(\vec{v})$ équivaut à $\vec{v} \in W$.

Même question pour $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Les vecteurs \vec{u}_1, \vec{u}_2 sont orthogonaux : $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$.

b)

$$\vec{p}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 = \frac{2}{7} \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 4/7 \\ 6/7 \end{pmatrix}.$$

c) $\vec{z} = \vec{v} - \vec{p}_W(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 5/7 \\ -4/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$.

Exercice 12

Soit W un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Soit $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_q\}$ une base orthogonale de W . Soit $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$ une base orthogonale de W^\perp .

Montrer que $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_q, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$ est orthogonale et prouver la relation

$$\dim W + \dim W^\perp = n.$$

Sol.: Le vecteur \vec{w}_i et le vecteur \vec{v}_j sont orthogonaux pour tous $i = 1 \dots q$, $j = 1 \dots r$ car ils appartiennent aux espaces orthogonaux W et W^\perp . Les vecteurs \vec{w}_i sont orthogonaux entre eux car ils constituent une base orthogonale, de même pour les vecteurs \vec{v}_j . Ainsi, n'importe quels deux vecteurs dans la famille $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_q, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$ sont orthogonaux : c'est une famille orthogonale.

Montrons la relation $\dim W + \dim W^\perp = n$.

Méthode 1 : La famille $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_q, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$ est orthogonale donc linéairement indépendante. De plus tout vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ se décompose sous la forme $\vec{v} = \vec{z} + \vec{w}$ avec $\vec{z} \in W^\perp$ et $\vec{w} = \vec{p}_W(\vec{v}) \in W$. Or $\vec{z} \in W^\perp$ peut être décomposé dans la base $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$ de W^\perp et $\vec{p}_W(\vec{v}) \in W$ peut être décomposé dans la base $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_q\}$ de W . Ainsi, tout vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

peut se décomposer selon la famille linéairement indépendante $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_q, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$ qui est donc une base de \mathbb{R}^n . Par conséquent $q + r = n$.

Méthode 2 : Appliquons le théorème du rang à l'application linéaire projection \vec{p}_W :

$$\dim \text{Im } \vec{p}_W + \dim \text{Ker } \vec{p}_W = n.$$

Or la projection vérifie $\text{Ker } \vec{p}_W = W^\perp$ et $\text{Im } \vec{p}_W = W$, d'où le résultat.

Exercice 13

Soit $V = C[-1, 1] = \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ continue}\}$. On munit V du produit scalaire

$$(f|g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt.$$

Déterminer une base orthonormale du sous-espace vectoriel de V suivant :

$$\mathbb{P}_2 = \text{span} \{1, t, t^2\}.$$

Sol.: On considère la base canonique $p_1 = 1, p_2 = t, p_3 = t^2$ de \mathbb{P}_2 . La méthode de Gram-Schmidt permet d'orthonormaliser cette base pour obtenir la base q_1, q_2, q_3 cherchée.

On peut déjà poser $q_1 = \frac{p_1}{\|p_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, en utilisant la norme $\|f\| = \sqrt{(f|f)}$. Pour calculer q_2 on calcule produit scalaire $(p_2|q_1) = \int_{-1}^1 t \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$. Comme p_2 est déjà orthogonal à q_1 , il suffit de le normaliser. On a donc $q_2 = \frac{p_2}{\|p_2\|} = \frac{t}{\sqrt{2/3}}$. Enfin, il reste à déterminer q_3 . On a les produits scalaires $(p_3|q_1) = \int_{-1}^1 t^2 \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ et $(p_3|q_2) = \int_{-1}^1 t^2 \sqrt{\frac{3}{2}} t = 0$. Soit $W_2 = \text{span} \{q_1, q_2\}$. On calcule

$$\text{proj}_{W_2} p_3 = \frac{(p_3|q_1)}{(q_1|q_1)} q_1 + \frac{(p_3|q_2)}{(q_2|q_2)} q_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}.$$

On a donc $\tilde{q}_3 = p_3 - \text{proj}_{W_2} p_3 = t^2 - \frac{1}{3}$. Ainsi, $q_3 = \frac{\tilde{q}_3}{\|\tilde{q}_3\|} = \frac{\sqrt{\frac{45}{8}} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{45}{8}} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)}$.

(Remarque : On pourrait continuer ainsi et obtenir pour tout n une base de \mathbb{P}_n orthogonale pour ce produit scalaire. Avec une normalisation différente, ces polynômes s'appelle alors les polynômes de Legendre.)

Exercice 14

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Alors pour un vecteur \vec{v} , $\|c \vec{v}\| = c \|\vec{v}\|$ quel que soit le scalaire c .

b) Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2 \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2.$$

- c) Si un vecteur \vec{v} est orthogonal à tous les vecteurs sauf un d'une base d'un sous-espace W , alors \vec{v} appartient à W^\perp . \square \square
- d) Soit W un sous-espace d'un espace vectoriel V . Si la dimension de l'espace W^\perp est égale à 1, alors on peut trouver une base de V formée par des vecteurs de W . \square \square

Sol.: Faux : a), b), c), d).

En effet, pour a) on a que $\|c\vec{v}\| = |c| \|\vec{v}\|$ donc pour $c = -1$ on a $\|-\vec{v}\| = \|\vec{v}\| \neq -\|\vec{v}\|$.

Pour b) on trouve un contre-exemple : Avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a $\|u\| = 1 = \|v\|$, $u+v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\|u+v\| = \sqrt{2}$. Ainsi $2 = \|u+v\|^2 \neq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = 1 + 2 + 1 = 4$.

Pour c) prenons $W = \text{span}\{e_1, e_2\}$ avec e_i le i -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^2 . En prenant $v = e_2$ on a bien que $v \perp e_1$ mais $v \not\perp e_2$.

Pour d), prenons $V = \mathbb{R}^2$ et $W = \text{span}\{e_1\}$. On a que $W^\perp = \text{span}\{e_2\}$ et $\dim W = \dim W^\perp = 1$ mais W ne peut pas contenir une base de \mathbb{R}^2 .

Exercices additionnels

Exercice 15

Soit x, y, z des inconnues. On considère le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos x + \cos y + 2 \cos z = 3 \\ 2 \cos x - 2\sqrt{2} \cos y + 2 \cos z = 1 - \sqrt{2} \\ \cos x + \cos y - \sqrt{2} \cos z = 1 \end{cases}$$

En posant $X = \cos x$, $Y = \cos y$ et $Z = \cos z$, et en substituant dans le système original, on obtient un système d'équations linéaires aux inconnues X, Y et Z . Utiliser l'algorithme de Gauss pour résoudre ce système et ensuite en déduire les valeurs de x, y et z dans l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$ qui satisfont au système initial.

Sol.: On écrit la matrice augmentée du système, où l'on a échangé les première et dernière lignes :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & -2\sqrt{2} & 2 & 1 - \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{L2} \leftarrow \text{L2} + (-2) \cdot \text{L1} \\ \text{L3} \leftarrow \text{L3} + (-\sqrt{2}) \cdot \text{L1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -2 - 2\sqrt{2} & 2 + 2\sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} \\ 0 & 1 - \sqrt{2} & 4 & 3 - \sqrt{2} \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{L2} \leftarrow \text{L2} + (-2) \cdot \text{L3} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -4 & -6 + 2\sqrt{2} & -7 + \sqrt{2} \\ 0 & 1 - \sqrt{2} & 4 & 3 - \sqrt{2} \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{L2} \leftarrow \text{L2} \cdot \frac{-1}{4} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{7}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 1 - \sqrt{2} & 4 & 3 - \sqrt{2} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \text{L3} \leftarrow \text{L3} + \text{L2} \cdot (\sqrt{2} - 1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{7}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} + \frac{3}{2} & \sqrt{2} + \frac{3}{4} \end{array} \right) \leftarrow Z = \frac{1}{2}, Y = 1, X = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Au final, on trouve $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$ et $z = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 16

Soit A une matrice $n \times n$ telle que $A^3 = 0$. Montrer que $I_n - A$ est inversible et que son inverse est donné par $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2$.

Sol.: Posons $C := I_n + A + A^2$. On calcule

$$(I_n - A)C = C - AC = (I_n + A + A^2) - (A + A^2 + \underbrace{A^3}_{=0}) = I_n.$$

De même,

$$C(I_n - A) = C - CA = (I_n + A + A^2) - (A + A^2 + \underbrace{A^3}_{=0}) = I_n.$$

Ceci implique bien que $I_n - A$ est inversible et que son inverse est donné par C .

Exercice 17

Soit A une matrice $n \times n$. Montrer que si deux lignes de A sont identiques, alors $\det(A) = 0$. Que peut-on dire si deux colonnes sont identiques ?

Sol.: Deux lignes de A sont identiques ssi deux colonnes de A^T sont identiques. Si deux colonnes de A^T sont les mêmes, alors les colonnes sont linéairement dépendantes, ainsi A^T est non inversible, c-à-d $\det(A^T) = \det(A) = 0$. On peut donc conclure dans tous les cas $\det(A) = 0$.

Méthode 2 : Échanger deux lignes (ou colonnes) de A multiplie le déterminant de A par -1 . En échangeant deux lignes identiques (ou colonnes) de A , la matrice A ne change pas. On a donc : $\det(A) = -\det(A)$. Ainsi $\det(A) = 0$.

Exercice 18

On considère la transformation $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_2$ définie par

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a + b + c + d) + (a + b)t + (c + d)t^2.$$

- Vérifier que T est linéaire.
- Trouver la dimension et une base de $\text{Im}T$.
- Vérifier que le polynôme $7 + 5t + 2t^2$ est bien dans l'image de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en (b).
- Trouver la dimension et une base de $\text{Ker}T$.
- Vérifier que le polynôme $2 - 2t - 5t^2 + 5t^3$ est bien dans le noyau de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en (d).

Sol.: Par rapport aux bases canoniques $\{1, t, t^2, t^3\}$ de \mathbb{P}_3 et $\{1, t, t^2\}$ de \mathbb{P}_2 , la matrice associée à l'application linéaire T est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc l'image de T est un sous-espace de \mathbb{P}_2 de dimension 2 avec base $\mathcal{B}_{\text{Im}} = \{1+t, 1+t^2\}$ et le noyau de T est un sous-espace de \mathbb{P}_3 de dimension 2 avec base $\mathcal{B}_{\text{Ker}} = \{1-t, t^2-t^3\}$.

Le polynôme $7+5t+2t^2$ est bien dans l'image de T puisque - par exemple - $T(5+2t^2) = 7+5t+2t^2$.

Ses coordonnées dans la base \mathcal{B}_{Im} sont $(7+5t+2t^2)_{\mathcal{B}_{\text{Im}}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, puisque

$$7+5t+2t^2 = 5(1+t) + 2(1+t^2).$$

Le polynôme $2-2t-5t^2+5t^3$ est bien dans le noyau de T puisque $T(2-2t-5t^2+5t^3) = 0$. Ses

coordonnées dans la base \mathcal{B}_{Ker} sont $(2-2t-5t^2+5t^3)_{\mathcal{B}_{\text{Ker}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, puisque

$$2-2t-5t^2+5t^3 = 2(1-t) - 5(t^2-t^3).$$

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, Jérôme Scherer, ...). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.