Série 11 (Corrigé)

Cette série suit le chapitre 5 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *valeurs et vecteurs propres, diagonalisation*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Déterminer lesquelles, parmi les matrices suivantes, sont diagonalisables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

A. Oui car A est déjà diagonale.

B. Oui. Les valeurs propres de B sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 1$. Les valeurs propres de B sont distinctes, donc une famille avec un vecteur propre pour λ_1 et un vecteur propre pour λ_2 est linéairement indépendante, et constitue une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, B est diagonalisable.

C. Oui. Les valeurs propres de C sont $4, 5, 5$ (obtenues en cherchant les racines du polynôme caractéristique). Comme la valeur propre 5 est de multiplicité 2, il faut vérifier si la dimension de l'espace propre associé est aussi 2. On calcule :

$$C - 5I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes 1 et 3 sont proportionnelles, et la colonne 2 est nulle, d'où $\operatorname{rang}(C - 5I_3) = 1$. Par conséquent, $\dim Ker(C - 5I_3) = 3 - 1 = 2$, et la matrice C est diagonalisable.

D. Oui. Le polynôme caractéristique de D est

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 36\lambda = -\lambda(\lambda - 6)(\lambda + 6).$$

Les valeurs propres sont donc $0, -6, 6$. Elles sont distinctes donc D est diagonalisable.

Remarque : le théorème spectral stipule que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Exercice 2

Démontrer ou trouver un contre-exemple. Soient $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 2$ entiers.

a) Si A est une matrice $n \times n$ diagonalisable, alors A^k est diagonalisable.

b) Si A est une matrice $n \times n$ et A^k est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

Sol.:

a) L'affirmation est vraie. Si A est diagonalisable, alors il existe P une matrice $n \times n$ inversible et D une matrice $n \times n$ diagonale telles que $P^{-1}AP = D$. Alors, on a

$$P^{-1}A^kP = P^{-1}APP^{-1}AP \dots P^{-1}AP = DD \dots D = D^k,$$

et comme D^k est diagonale, A^k est bien diagonalisable.

b) L'affirmation est fausse. En effet, on considère la matrice A avec des zéros partout sauf un 1 en haut à droite (ligne 1, colonne n). Cette matrice A n'est pas diagonalisable, et pourtant A^k est nulle donc diagonalisable.

Exercice 3

Soit A une matrice de taille $n \times n$ et $k \geqslant 2$ un entier. Montrer que si λ est une valeur propre de A avec pour vecteur propre $\overrightarrow{v}$, alors λ^k est une valeur propre de

$$A^k = \underbrace{A\,A\,\cdots\,A}_{k \text{ fois}}$$

avec pour vecteur propre $\overrightarrow{v}$.

Sol.: Par définition, on a $A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$. Par récurrence sur k, on montre $A^k\overrightarrow{v} = \lambda^k\overrightarrow{v}$. Supposons le résultat vrai au rang $k-1$, c-à-d $A^{k-1}\overrightarrow{v} = \lambda^{k-1}\overrightarrow{v}$. On a alors :

$$A^k\overrightarrow{v} = A(A^{k-1}\overrightarrow{v}) = A(\lambda^{k-1}\overrightarrow{v}) = \lambda^{k-1}A\overrightarrow{v} = \lambda^{k-1}\lambda\overrightarrow{v} = \lambda^k\overrightarrow{v}.$$

Ceci montre que le vecteur $\overrightarrow{v}$, non nul, est un vecteur propre de la matrice A^k associé à la valeur propre λ^k.

Exercice 4

Calculer pour les matrices suivantes les valeurs propres et une base de chaque espace propre dans $\mathbb{C}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

A. Le polynôme caractéristique de A est $\lambda^2 - 6\lambda + 10$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_{1,2} = 3 \pm i$. Les vecteurs propres correspondants sont $v_1 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}$.

B. Le polynôme caractéristique de B est $\lambda^2 - 8\lambda + 17$. Les valeurs propres de B sont $\lambda_{1,2} = 4 \pm i$. Les vecteurs propres correspondants sont $v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$.

C. Le polynôme caractéristique de C est $\lambda^2 - 8\lambda + 25$. Les valeurs propres de C sont $\lambda_{1,2} = 4 \pm 3i$. Les vecteurs propres correspondants sont $v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Toute matrice A de taille $n \times n$ a un polynôme caractéristique p_A qui peut s'écrire sous forme factorisée comme suit : $p_A(t) = (\lambda_1 - t) \cdots (\lambda_n - t)$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les n valeurs propres de A (réelles ou complexes, et pas forcément toutes différentes).

Montrez que $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ et que $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

Sol.: On a $p(t) = \det(A - tI_n) = (-1)^n(t^n - \mathrm{Tr}(A)t^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A))$ Mais aussi $p(t) = (-1)^n(t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n)$.

Si on compare les termes devant les différents degrés, on obtient les deux égalités voulues. En effet $-\lambda_1 \cdot -\lambda_2 \cdots - \lambda_n = (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$, qui doit être égal à $(-1)^n \det(A)$. On en conclut que $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

Pour la trace c'est un peu plus compliqué, mais le terme de degré $n-1$ vaut

$$-\lambda_1 t^{n-1} - \lambda_2 t^{n-2} - \cdots - \lambda_n t^{n-1} = -(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)t^{n-1}$$

Or ceci doit correspondre à $-\mathrm{Tr}(A)t^{n-1}$. Donc la somme des valeurs propres nous donne la trace.

Exercice 6

Soit A une matrice 3×3 et a un nombre réel. On suppose que

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33} = a$$

Calculer $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et conclure que a est une valeur propre de A.

Sol.: Calculons donc

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en conclut que a est une valeur propre de A puisque $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre.

Exercice 7

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que 0 et 6 sont des valeurs propres de A et calculer les espaces propres associés.

Sol.: Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Comme la somme des coefficients de chaque ligne vaut 6, on a que $6 = 1+2+3$ est une valeur propre. Un vecteur propre est par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Celui-ci forme une base de E_6.

D'autre part le rang de cette matrice vaut 1 car toutes les colonnes sont proportionnelles. Par conséquent le noyau est de dimension 2 par le Théorème du rang ce qui signifie que 0 est une valeur propre. L'espace propre E_0 est donc de dimension 2 : $E_0 = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ dont une base est donnée par $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8

Soit $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2, dont une base est donnée par $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, S_3\}$ où

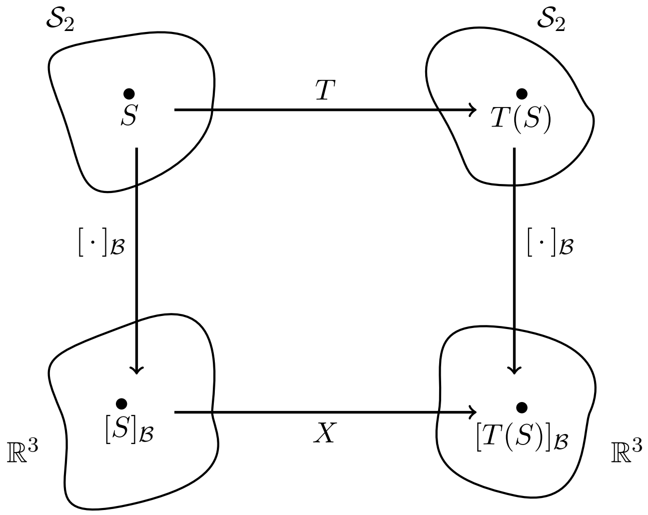
$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $T : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ la transformation linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - d & -b \\ -b & -a + 2d \end{pmatrix}.$$

a) Calculer les 3 valeurs propres (distinctes) $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ de T.
b) Trouver un vecteur propre $M_i \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ associé à chaque λ_i. Montrer que $\mathcal{B}' = \{M_1, M_2, M_3\}$ est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
c) Ecrire la matrice de T par rapport à la base $\mathcal{B}'$.
d) Calculer $T^{10}(A)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Sol.: On cherche à trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T(S) = \lambda S$, pour S symétrique. Or pour résoudre cela, on aimerait avoir une matrice pour pouvoir calculer ses valeurs propres comme on a l'habitude de faire. On calcule alors la matrice de l'application T dans la base $\mathcal{B}$. Voila un schéma et une explication de pourquoi.



On aura $[T(S)]_{\mathcal{B}} = X[S]_{\mathcal{B}}$ où X est la matrice qui représente T dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ (elle sera 3×3). Par définition, la matrice X est donnée par

$$X = ([T(S_1)]_{\mathcal{B}} \quad [T(S_2)]_{\mathcal{B}} \quad [T(S_3)]_{\mathcal{B}})$$

Si $T(S) = \lambda S$ on a $[T(S)]_{\mathcal{B}} = \lambda[S]_{\mathcal{B}}$ car $[\,\cdot\,]_{\mathcal{B}}$ est linéaire. Donc, en combianant les deux égalités pour $[T(S)]_{\mathcal{B}}$ on obtient que : trouver les valeurs propres de T est équivalent à trouver les valeurs propres de la matrice X. On doit alors trouver λ tel que $X[S]_{\mathcal{B}} = \lambda[S]_{\mathcal{B}}$.

Par contre les vecteurs propres obtenus seront des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et il faudra utiliser la définition de $[\,\cdot\,]_{\mathcal{B}}$ pour trouver les matrices associées aux valeurs propres obtenues.

On calcule les images des différents vecteurs de base :

$$T(S_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T(S_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(S_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Puis on cherche les coefficients de $T(S_i)$ dans la base $\mathcal{B}$. Ceci nous donnera les colonnes de la matrice de l'application T par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) On calcule :

$$\det(X - \lambda \cdot I_3) = (2-\lambda)^2 \cdot (-1-\lambda) - (1-\lambda) = -(\lambda-1)\cdot(\lambda+1)\cdot(\lambda-3).$$

Ainsi, on a $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 3$.

b) On cherche les différents espaces propres. Pour $\lambda = 1$, on cherche donc les matrices A symétriques telles que $T(A) = A$. Il s'agit donc de calculer le noyau de $X - I_3$. On trouve une droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui représente la matrice symétrique $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

De même, pour $\lambda = -1$, on trouve $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (on aurait pu le deviner, puisque $T(S_2) = -S_2$).

Finalement, pour la dernière valeur propre 3, on trouve $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
On sait que trois vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants (vous pouvez aussi le vérifier à la main). Comme l'espace des matrices symétriques de taille 2 est de dimension 3, il s'agit d'une base.

c) Par un théorème du cours, on sait que la matrice diagonale avec les valeurs propres sur la diagonale est la matrice qui représente l'application T dans la base formée de vecteurs propres $[M_i]_{\mathcal{B}}$. Il suffit de placer les valeurs propres dans l'ordre choisi dans la diagonale : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

On peut aussi utiliser la définition de la matrice qui représente T dans la base $\mathcal{B}'$ formée de vecteurs propres

$$D = ([T(M_1)]_{\mathcal{B}'} \quad [T(M_2)]_{\mathcal{B}'} \quad [T(M_3)]_{\mathcal{B}'})$$

Si on combine le tout on aura

$$X = ([M_1]_{\mathcal{B}} \quad [M_2]_{\mathcal{B}} \quad [M_2]_{\mathcal{B}})D([M_1]_{\mathcal{B}} \quad [M_2]_{\mathcal{B}} \quad [M_2]_{\mathcal{B}})^{-1}$$

et on voit que nous avons fait une diagonalistion de X.

d) On remarque que l'on peut écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot M_1 + 2 \cdot M_2 + (-1) \cdot M_3,$$

c'est-à-dire que les coordonnées de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont $(2, 2, -1)$. Ainsi les composantes de $T^{10}(A)$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^{10} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3^{10} \end{pmatrix}.$$

Finalement, on a

$$T^{10}(A) = 2 \cdot M_1 + 2 \cdot M_2 + (-3^{10})M_3 = \begin{pmatrix} 2 - 3^{10} & 2 \\ 2 & 2 + 3^{10} \end{pmatrix}.$$

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A.
2. Calculer les vecteurs propres de A.

3. Soit P la matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de A (associés à des valeurs propres *différentes*). Calculer $P^{-1}AP$, et interpréter le résultat.
4. Calculer A^{1000}.

Sol.: 1) Le polynôme caractéristique de A est donné par

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 5)\,.$$

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$.

2) On cherche d'abord le(s) vecteur(s) propre(s) associé(s) à λ_1, c'est-à-dire les vecteurs $\overrightarrow{v}$ satisfaisant $A\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v}$, en résolvant

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\,.$$

(On *sait* que ce système doit posséder une infinité de solutions !) On trouve que tous les vecteurs propres sont colinéaires à

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

On trouve de même que tous les vecteurs propres associés à λ_2 sont colinéaires à

$$\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

3) Si

$$P = (\overrightarrow{v}_1\ \overrightarrow{v}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

on calcule :

$$P^{-1}AP = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \equiv D\,,$$

qui n'est autre que la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A. On a donc *diagonalisé* la matrice A.

4) Comme vu en classe, la diagonalisation permet de calculer les grandes puissances de A de manière directe. Comme $P^{-1}AP = D$, on a $A = PDP^{-1}$, et

$$\begin{aligned} A^{1000} = PD^{1000}P^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^{1000} & 0 \\ 0 & 5^{1000} \end{pmatrix}(-\tfrac{1}{3})\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}5^{1000} & -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}5^{1000} \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}5^{1000} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}5^{1000} \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

Exercice 10

Soit A une matrice de taille $n \times n$. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (justifier).

V F

a) A est diagonalisable si et seulement si elle possède n valeurs propres distinctes. ☐ ☐
b) A est diagonalisable si A possède n vecteurs propres.
c) Si A est diagonalisable, alors A est inversible. ☐ ☐
d) Si A est inversible, alors A est diagonalisable. ☐ ☐
e) Si 0 est valeur propre, alors $\text{rang}\,(A) < n$. ☐ ☐
f) Pour tout matrice inversible P de taille $n \times n$, λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une valeur propre de $P^{-1}AP$. ☐ ☐

Sol.:

a) Faux. En effet la matrice identité est diagonale donc diagonalisable, et pourtant sa seule valeur propre est 1.
b) Faux. A doit posséder n vecteurs propres linéairement indépendants. Pour un contre-exemple il suffit de prendre $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui n'est pas diagonalisable et qui possède une infinité de vecteurs propres $\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ (pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) pour la valeur propre $\lambda = 1$.
c) Faux. Méthode 1 : La matrice nulle est diagonalisable mais non inversible.
Méthode 2 : On peut aussi proposer la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ diagonale donc diagonalisable, mais non inversible.
d) Faux (pour $n \geqslant 2$). En effet, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, mais non diagonalisable, car l'espace propre associé à la valeur propre 1 (de multiplicité 2) est de dimension seulement 1.
e) Vrai. Si 0 est valeur propre, la dimension du noyau est non nulle, et donc $\text{rang}\,(A) = n - \dim \text{Ker}\, A < n$.
f) Vrai. A et $B = P^{-1}AP$ sont semblables, donc elles ont les mêmes valeurs propres (avec les mêmes multiplicités).
Remarque : si on note $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots$ les vecteurs propres de B, alors les vecteurs propres de A sont $P\overrightarrow{v}_1, P\overrightarrow{v}_2, \ldots$.

Exercice 11

a. Soit A une matrice de taille 3×3 inversible et λ une valeur propre de A.

☐ Alors λ^{-1} est une valeur propre de $-A$.

☐ Alors λ est une valeur propre de $-A$.

☐ Alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}.

☐ Alors λ est une valeur propre de A^{-1}.

b. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

☐ Alors seulement 6 est une valeur propre de A.

☐ Alors -6 et -4 sont valeurs propres de A.

☐ Alors 6 et 0 sont valeurs propres de A.

☐ Alors -4 et 6 sont valeurs propres de A.

c. Soit $\mathcal{B} = (1-t, 1+t, 1+t+t^2)$ et $\mathcal{C} = (1, t-\frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})$.

☐ Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, mais pas $\mathcal{C}$.

☐ Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, et $\mathcal{C}$ aussi.

☐ Alors $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, mais pas $\mathcal{B}$.

☐ Alors $\mathcal{B}$ n'est pas une base de $\mathbb{P}_2$, et $\mathcal{C}$ non plus.

d. Soit $\mathcal{B} = (1-t, 1+t, 1+t+t^2)$ et $\mathcal{C} = (1, t-\frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})$. Soit encore S la matrice de changement de base de B à C et soit T la matrice de changement de base de C à B.

☐ Alors $s_{13} = 0$ et $t_{23} = 0$.

☐ Alors $s_{13} = 9/16$ et $t_{23} = 3/2$.

☐ Alors $s_{13} = -1$ et $t_{23} = -3/4$.

☐ Alors $s_{13} = 3/2$ et $t_{23} = -9/8$.

e. Soit A une matrice de taille 2×2 qui n'est pas inversible. Alors

☐ 0 est une valeur propre de A.

☐ A est la matrice nulle.

☐ A n'a pas de valeur propre réelle.

☐ tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est un vecteur propre de A.

Sol.:

a. ☐ Alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}.

En effet, si $\overrightarrow{x}$ est un vecteur propre de la matrice A pour la valeur propre λ, on a $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$. Multiplions cette égalité à gauche par la matrice inverse A^{-1} :

$$\overrightarrow{x} = A^{-1}A\overrightarrow{x} = A^{-1}\lambda\overrightarrow{x} = \lambda A^{-1}\overrightarrow{x}$$

Ainsi, en divisant par λ, on conclut que l'inverse de λ est une valeur propre de l'inverse de A, pour le même vecteur propre ! Il n'y a aucune raison pour que λ soit une valeur propre de A^{-1} et pour que λ ou λ^{-1} soit une valeur propre de $-A$. Pensons en effet à la matrice $2I$ dont la seule valeur propre est 2. Par contre, il est vrai que $-\lambda$ est une valeur propre de $-A$ puisque si $\overrightarrow{x}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ, alors $(-A)\overrightarrow{x} = -A\overrightarrow{x} = -\lambda\overrightarrow{x}$.

b. ☐ Alors -4 et 6 sont valeurs propres de A.

On voit que 6 est une valeur propre de A car $6 = 1 + 5$, voir exercices 5, 6 et 7. On voit aussi que -4 est valeur propre de A, car $1 - 5 = -4$, voir exercice 7. Comme les deux lignes de A ne sont pas colinéaires, le noyau de A est nul si bien que 0 n'est pas valeur propre, et -6 n'est pas valeur propre non plus car $A+6I_2$ est de rang 2. Nous verrons bientôt qu'une matrice carrée de taille $n \times n$ ne peut avoir plus de n valeurs propres, nous aurions donc pu nous contenter d'observer que 6 et -4 sont valeurs propres pour éliminer les réponses 1, 2 et 3.

c. ☐ Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, et $\mathcal{C}$ aussi.

Les deux familles proposées forment des bases. On peut le voir par exemple pour chacune des bases en écrivant la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de coordonnées des polynômes donnés par rapport à la base canonique. Cette matrice est inversible dans les deux cas.

d. ☐ Alors $s_{13} = 3/2$ et $t_{23} = -9/8$.

Les matrices de changement de base sont :

$$S = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 3/2 \\ -1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/4 & 3/8 \\ 1/2 & 1/4 & -9/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e. ☐ 0 est une valeur propre de A.

Par l'exercice 7 première partie, comme $A = A - 0 \cdot I_2$ n'est pas inversible, le système $A\overrightarrow{x} = 0$ admet une solution non nulle. Autrement dit, 0 est une valeur propre de A. En particulier, cela implique que A a une valeur propre réelle. Ensuite, considérer la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas inversible et non nulle. Finalement, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur propre de A, par exemple.

<u>Exercices additionnels</u>

Exercice 12

Parmi les matrices suivantes, indiquer celles qui sont diagonalisables (toujours en justifiant), et le cas échéant, diagonaliser ces matrices et exhiber les vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

— A n'est pas diagonalisable. Ses valeurs propres sont : $-2, -2, 1$. La dimension de l'espace propre pour $\lambda = -2$ est seulement 1 alors que la multiplicité est 2.

— B est diagonalisable. En effet, les valeurs propres sont distinctes :

$$2, 1, \frac{1}{2}\left(7+\sqrt{13}\right), \frac{1}{2}\left(7-\sqrt{13}\right).$$

On voit facilement que $\overrightarrow{v}_1 = (1\ 0\ 0\ 0)^T$ et $\overrightarrow{v}_2 = (0\ 1\ 0\ 0)^T$ sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Les vecteurs propres pour $\lambda_3 = \frac{1}{2}\left(7+\sqrt{13}\right)$ et $\lambda_4 = \frac{1}{2}\left(7-\sqrt{13}\right)$ sont

$$\overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} -2+\sqrt{13} \\ \frac{1}{6}\left(-17+7\sqrt{13}\right) \\ 1 \\ \frac{1}{2}(-1+\sqrt{13}) \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{v}_4 = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{13} \\ \frac{1}{6}\left(-17-7\sqrt{13}\right) \\ 1 \\ \frac{1}{2}(-1-\sqrt{13}) \end{pmatrix}.$$

Maintenant, si $\widetilde{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ et $P = (\overrightarrow{v}_1\ \overrightarrow{v}_2\ \overrightarrow{v}_3\ \overrightarrow{v}_4)$, on a $B = P\widetilde{D}P^{-1}$.

— C est diagonalisable. Valeurs propres : $5, 5, -3, -3$.
Vecteurs propres associés : $\overrightarrow{v}_1 = (-16\ 4\ 0\ 1)^T$, $\overrightarrow{v}_2 = (-8\ 4\ 1\ 0)^T$, $\overrightarrow{v}_3 = (0\ 0\ 1\ 0)^T$, $\overrightarrow{v}_4 = (0\ 0\ 0\ 1)^T$.
Remarque : les vecteurs propres $(0\ 0\ 1\ 0)^T, (0\ 0\ 0\ 1)^T$ étaient faciles à deviner.
Maintenant, si $\widetilde{D} = \mathrm{diag}(5, 5, -3, -3)$ et $P = (\overrightarrow{v}_1\ \overrightarrow{v}_2\ \overrightarrow{v}_3\ \overrightarrow{v}_4)$, on a $C = P\widetilde{D}P^{-1}$.

— D est diagonalisable. Valeurs propres : $5, 5, 4$.
Vecteurs propres associés : $\overrightarrow{v}_1 = (-2\ 0\ 1)^T$, $\overrightarrow{v}_2 = (0\ 1\ 0)^T$, $\overrightarrow{v}_3 = (-1\ 2\ 0)^T$.
Remarque : le vecteur propre $(0\ 1\ 0)^T$ était facile à deviner.
Maintenant, si $\widetilde{D} = \mathrm{diag}(5, 5, 4)$ et $P = (\overrightarrow{v}_1\ \overrightarrow{v}_2\ \overrightarrow{v}_3)$, on a $D = P\widetilde{D}P^{-1}$.

— E n'est pas diagonalisable. Valeurs propres : $0, 0$. La dimension de l'espace propre associé à $\lambda = 0$ est seulement 1.

Exercice 13

Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$ telles que $A^2 = B^2 = 0$. Montrer qu'en général $(A+B)(A-B) \neq 0$.

Est-ce qu'il y a des cas où l'égalité peut être vraie ?

Sol.:

On a

$$(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2.$$

Par hypothèse les matrice A et B sont deux matrices nilpotentes avec un indice de nilpotence 2, donc

$$(A+B)(A-B) = BA - AB.$$

En général pour deux matrices quelconques $AB \neq BA$, et l'affirmation est fausse. Il n'y a que dans la situation où $AB = BA$, c'est à dire dans le cas où les deux matrices commutent, que l'affirmation est vraie. Par exemple avec les deux matrices ci-dessous on a $A^2 = B^2 = 0$ mais $AB \neq BA$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$