Série 10 (Corrigé)

Cette série suit les chapitres 4 et 5 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *bases, coordonnées, changement de base, valeurs et vecteurs propres*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Soit $\overrightarrow{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Soient E la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et B une base de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

a) Donner la matrice M qui représente T par rapport aux bases E (de départ) et B (d'arrivée).

b) Même question pour les bases B (de départ) et E (d'arrivée).

c) Même question pour les bases B (de départ) et B (d'arrivée).

Sol.: Deux versions : une sans utiliser la théorie sur le changement de base, et une avec.

Sans utiliser la théorie sur le changement de base

a) On note $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3$ les vecteurs de la base canonique E de $\mathbb{R}^3$. Par définition, la matrice canonique de l'application T est

$$([T(\overrightarrow{e}_1)]_E \quad [T(\overrightarrow{e}_2)]_E \quad [T(\overrightarrow{e}_3)]_E)\,.$$

On cherche

$$M = ([T(\overrightarrow{e}_1)]_B \quad [T(\overrightarrow{e}_2)]_B \quad [T(\overrightarrow{e}_3)]_B)\,.$$

On va donc chercher les vecteurs cordonnées de $T(\overrightarrow{e}_1)$, $T(\overrightarrow{e}_2)$ et $T(\overrightarrow{e}_3)$ par rapport à la base B. On note $\overrightarrow{b}_1$, $\overrightarrow{b}_2$, $\overrightarrow{b}_3$ les vecteurs de la base B. Commençons par $T(\overrightarrow{e}_1)$. On cherche l'unique vecteur $\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ tel que $T(\overrightarrow{e}_1) = r_1 \overrightarrow{b}_1 + r_2 \overrightarrow{b}_2 + r_3 \overrightarrow{b}_3$, i.e.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = [T(\overrightarrow{e}_1)]_B \, . \tag{1}$$

De façon similaire, on obtient

$$[T(\overrightarrow{e}_2)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad [T(\overrightarrow{e}_3)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) On procède de manière identique pour expliciter

$$M = \left([T(\overrightarrow{b}_1)]_E \quad [T(\overrightarrow{b}_2)]_E \quad [T(\overrightarrow{b}_3)]_E \right) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici les 3 systèmes à résoudre sont très simples car ils font intervenir la matrice identité (matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la base canonique E).

c) La matrice M recherchée est ici donnée par

$$M = \left([T(\overrightarrow{b}_1)]_B \quad [T(\overrightarrow{b}_2)]_B \quad [T(\overrightarrow{b}_3)]_B \right).$$

Les 3 systèmes à résoudre font intervenir la même matrice qu'en (**??**). On obtient

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la théorie sur le changement de base

a) On commence par prendre les vecteurs de la base de départ et à leur appliquer la transformation T. On obtient

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui sont encore exprimés dans la base canonique E. Il faut maintenant calculer la matrice de passage de la base E à la base B, notée P_{BE} (telle que $[\overrightarrow{x}]_B = P_{BE}[\overrightarrow{x}]_E$). On sait, du cours, que cette matrice est l'inverse de la matrice de passage de la base B à la base E, notée P_{EB}. Cette dernière est donnée par

$$P_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

i.e. ses colonnes sont les vecteurs de la base B, exprimés dans la base E. Pour calculer son inverse, on peut utiliser la méthode vue en cours (avec l'identité à droite), ou calculer directement son inverse en résolvant $P_{EB}P_{EB}^{-1} = I_3$, où l'on pose

$$P_{EB}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

On résout

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice P_{EB} contient beaucoup de zéros, il sera plus simple de résoudre le système d'équations obtenu que d'utiliser la méthode vue en cours. On obtient facilement que l'inverse est

$$P_{EB}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P_{BE}.$$

On applique alors P_{BE} aux vecteurs obtenus précédemment (qui sont exprimés dans la base E). La matrice M est

$$M = \Big([P_{BE}\overrightarrow{T}(\overrightarrow{e}_1)] \quad [P_{BE}\overrightarrow{T}(\overrightarrow{e}_2)] \quad [P_{BE}\overrightarrow{T}(\overrightarrow{e}_3)] \Big) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) On commence par prendre les vecteurs de la base de départ et à leur appliquer la transformation T.

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui sont exprimés dans la base canonique E. La matrice M est

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Variante en utilisant la définition de la matrice associée à T. On sait que $T(\overrightarrow{b_i}) = A\overrightarrow{b_i}$ avec $A = ([T(\overrightarrow{e_1})]_E \quad [T(\overrightarrow{e_2})]_E \quad [T(\overrightarrow{e_3})]_E)$. Ainsi on peut trouver les colonnes de notre matrice cherchée en résolvant

$$([T(\overrightarrow{e_1})]_E \quad [T(\overrightarrow{e_2})]_E \quad [T(\overrightarrow{e_3})]_E)([\overrightarrow{b_1}]_E \quad [\overrightarrow{b_2}]_E \quad [\overrightarrow{b_3}]_E) = (T(\overrightarrow{b_1}) \quad T(\overrightarrow{b_2}) \quad T(\overrightarrow{b_3}))$$

c) On applique P_{BE} aux vecteurs obtenus au point précédent et on obtient la matrice

$$M = \left([P_{BE}\overrightarrow{T}(\overrightarrow{b}_1)] \quad [P_{BE}\overrightarrow{T}(\overrightarrow{b}_2)] \quad [P_{BE}\overrightarrow{T}(\overrightarrow{b}_3)] \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

a) Soit A une matrice 5×6. Si $\dim(\mathrm{Ker}A) = 3$, quel est le rang de A ?
b) Soit A une matrice 7×3. Quel est le rang maximum de A ? Quelle est la dimension minimum de $\mathrm{Ker}A$? Même question si A est une matrice 3×7.
c) Soit A une matrice $n \times n$. Donner une condition sur $\mathrm{rang}(A)$ pour que A^T soit inversible.
d) Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une transformation linéaire telle que $T \circ T \circ T = I_3$ (l'application identité). Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}T$?

Sol.:

a) On considère l'application linéaire associée de $\mathbb{R}^6$ dans $\mathbb{R}^5$. Le théorème du rang donne

$$\mathrm{rang}(A) + \dim \mathrm{Ker}A = 6 \Rightarrow \mathrm{rang}(A) = 3.$$

b) Si A est de taille 7×3, alors $\mathrm{rang}(A) + \dim \mathrm{Ker}A = 3$. Le rang maximum est 3 et la dimension minimum du noyau est 0.

Si A est de taille 3×7 , le rang maximum est 3. Comme $\mathrm{rang}(A) + \dim \mathrm{Ker}A = 7$, la dimension minimum du noyau est 4.

c) A^T est inversible $\Leftrightarrow$ A est inversible $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rang}(A) = n$.
d) On a

$$3 = \mathrm{rang}(I_3) = \mathrm{rang}(T \circ T \circ T).$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(T \circ T \circ T) = \{\overrightarrow{0}\}$. Comme

$$\overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}T \Rightarrow \overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}(T \circ T \circ T),$$

on obtient $\dim \mathrm{Ker}T = 0$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble formé des quatre premiers polynômes de Hermite :

$$\mathcal{F} = (1, 2t, -2 + 4t^2, -12t + 8t^3).$$

a) Montrer que $\mathcal{F}$ forme une base de $\mathbb{P}_3$.
b) Quelles sont les coordonnées $[y(t)]_{\mathcal{F}}$ du polynôme $y(t) = 7 - 12t - 8t^2 + 12t^3$?

Remarque. Les polynômes de Hermite sont utiles lors de l'étude d'équations différentielles que l'on rencontre dans des problèmes de physique. Ils se construisent facilement à l'aide de relations de récurrence.

Sol.: Pour montrer que $\mathcal{F}$ forme une base de $\mathbb{P}_3$ il suffit de se rendre compte que nous avons exactement un polynôme de chaque degré compris entre 0 et 3. En effet, dans la base canonique $(1, t, t^2, t^3)$ les coordonnées des polynômes de Hermite sont $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-12\\0\\8\end{pmatrix}$.

La matrice obtenue en plaçant ces vecteurs de coordonnées dans les colonnes est déjà échelonnée ! On voit que cette matrice est inversible ce qui prouve que $\mathcal{F}$ est une base.

Pour calculer le vecteur de coordonnées de $y(t) = 7 - 12t - 8t^2 + 12t^3$ dans la base $\mathcal{F}$, il suffit de résoudre le système

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\0 & 2 & 0 & -12\\0 & 0 & 4 & 0\\0 & 0 & 0 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-12\\-8\\12\end{pmatrix} \text{ On trouve } [y(t)]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix}3\\3\\-2\\3/2\end{pmatrix}$$

Exercice 4

Trouver la dimension du sous-espace H défini par :

$$H = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}a - 3b + 6c\\5a + 4d\\b - 2c - d\\5d\end{pmatrix}, \text{ où } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

Sol.: Par construction, H est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini comme $\text{Vect}\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4\}$ avec

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\5\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix}-3\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_3 = \begin{bmatrix}6\\0\\-2\\0\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}_4 = \begin{bmatrix}0\\4\\-1\\5\end{bmatrix}.$$

On voit que $\overrightarrow{v}_3 = -2\overrightarrow{v}_2$, ce qui est équivalent à dire que $H = \text{Vect}\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_4\}$. En vérifiant que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants (en calculant la forme échelonnée de la matrice dont les colonnes sont $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_4$ par exemple), on peut déduire que H est de dimension 3.

Exercice 5

Soient

$$A = \begin{pmatrix}1 & -4 & 9 & -7\\-1 & 2 & -4 & 1\\5 & -6 & 10 & 7\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 5\\0 & -2 & 5 & -6\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

a) Montrer que les matrices A et B sont équivalentes (selon les lignes). (**Indication :** quelle est la forme échelonnée et réduite des deux matrices ?)
b) Calculer le rang de A et $\dim(\text{Ker}A)$.
c) Trouver une base pour chacun des sous-espaces $\text{Im}A$, $\text{Ker}A$ et $\text{Ker}A^T$, ainsi que du sous-espace $\text{Lgn}(A)$ engendré par les lignes de A.

Sol.:

a) On constate que la forme échelonnée réduite des deux matrices est la même, elles sont donc équivalentes.

b) En analysant la matrice B on remarque alors que :

Il y a deux colonnes indépendantes ce qui donne rang$A = 2$ (le rang est le nombre de colonnes-pivot) et une base de ImA peut être formée par les deux premières colonnes de A qui correspondent aux colonnes-pivot de sa forme échelonnée. Par le Théorème du rang on trouve dimKer$A = 4 - \text{rang}A = 2$.

c) Trouvons les bases.
Base de Ker(A) : L'équation $A\overrightarrow{x} = 0$ est équivalente à $B\overrightarrow{x} = 0$; une base de Ker$A$ est donnée par exemple par : $\left(\begin{pmatrix}2\\5\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ et donc $\dim \text{Ker}A = 2$, ce qui confirme le calcul effectué ci-dessus.
Base de Lgn(A) : Une base du sous-espace engendré par les lignes de A est donnée par les lignes non nulles de la forme échelonnée B :
$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\5\\-6\end{pmatrix}\right)$
Base de Im(A) et Ker(A) : Enfin ImA coïncide avec le sous-espace engendré par les lignes de A^T. Puisqu'il est de dimension 2, le Théorème du rang nous apprend que le noyau de A^T est de dimension $3 - 2 = 1$. On trouve que KerA^T est engendré par $\begin{pmatrix}2\\7\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 6

On considère la transformation $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que T est linéaire.
b) Trouver la dimension et une base de ImT.
c) Appliquer le Théorème du rang pour trouver la dimension du noyau de T.
d) Vérifier le résultat de c) en trouvant une base de Ker$T$.

Sol.: L'application T est linéaire puisque chacune des composantes de $T(p+q)$ est égale à $(p+q)(0) = p(0) + q(0)$, par définition de la somme de polynômes. De même $(\alpha p)(0) = \alpha \cdot p(0)$ pour tout nombre réel α, ce qui montre la compatibilité de T avec l'action.

L'image de T est constituée de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de la forme $\begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$. Leurs deux composantes sont égales et elles peuvent être non nulles (il suffit de choisir le polynôme constant 1 pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi l'image de T est de dimension un, une base est donnée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par le Théorème du rang, le noyau est donc de dimension $\dim \mathbb{P}_2 - 1 = 3 - 1 = 2$. Pour terminer il nous suffit de comprendre quels sont les polynômes p qui sont envoyés sur zéro par T. Ce sont tous ceux pour lesquels $p(0) = 0$, ce qui signifie que le coefficient constant est nul. Autrement dit

$$\mathrm{Ker}T = \{bt + ct^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{t, t^2\}$$

Une base du noyau est ainsi donnée par (t, t^2).

Exercice 7

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Démontrer que $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ admet une solution pour tout $\overrightarrow{b}$ dans $\mathbb{R}^m$ si et seulement si $A^T\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$ n'admet que la solution triviale $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$.

Sol.: Soit A une matrice de taille $m \times n$.

Dire que $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ admet toujours une solution est équivalent à dire que A est surjective, i.e. $\dim \mathrm{Im}A = m$. Par le Théorème du rang la dimension du noyau de A vaut $n - m$, ou encore le sous-espace engendré par les lignes de A est de dimension m. Les lignes de A étant les colonnes de A^T ceci veut dire que $\dim \mathrm{Im}A^T = m$. Une dernière application du Théorème du rang nous permet enfin de conclure que $\mathrm{dimKer}A^T = m - m = 0$. La matrice A^T représente donc une application linéaire injective. Ceci équivaut à dire que l'équation $A^T\overrightarrow{x} = 0$ n'admet que la solution triviale.

Exercice 8

1. Soit $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

   a) Donner la matrice A de l'application linéaire T par rapport aux bases canoniques E de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

   b) Donner la matrice B de l'application linéaire T par rapport aux bases

$$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \text{ de } \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

2. Soit $T\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $T(C) = X \cdot C$, où X est la matrice de taille 2×2

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   a) Donner la matrice A de l'application linéaire T par rapport à la base canonique de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) Donner la matrice B de l'application linéaire T par rapport à la base

$$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\} \text{ de } \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

On cherche $B = \begin{pmatrix} [T(B_1)]_{\mathcal{B}} & [T(B_2)]_{\mathcal{B}} & [T(B_3)]_{\mathcal{B}} & [T(B_4)]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$.

Sol.:

1. La matrice de l'application linéaire T par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer la matrice B, on commence par calculer les images par T des vecteurs de la base $\mathcal{B}$:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on calcule les coordonnées de ces deux vecteurs image dans la base $\mathcal{C}$ en résolvant les systèmes suivants :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right).$$

Ainsi

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 4 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice de l'application linéaire T par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer la matrice B, on commence par calculer les images par T des matrices de la base $\mathcal{B}$:

$$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5/2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 0, T\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Ensuite, on calcule les coordonnées des deux premiers vecteurs image dans la base $\mathcal{C}$ (les deux derniers sont les vecteurs nuls quelle que soit la base considérée) en résolvant les systèmes suivants :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 5/2 \\ -2 & 1 & -2 & -4 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 6 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -1/2 \\ -2 & 1 & -2 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/2 \end{array}\right).$$

Ainsi

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 9/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9

a) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$.

☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 0.

☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 0.

☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1.

☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.

b) On considère les polynômes $p(t) = (1-t)(1+t) = 1 - t^2$ et $q(t) = (1+t)(1+t) = 1 + 2t + t^2$ de $\mathbb{P}_2$.

☐ Les polynômes p et q sont linéairement indépendants.

☐ Les polynômes p et q forment une base de $\mathbb{P}_2$.

☐ Le polynôme $q - p$ est le polynôme nul.

☐ $(1+t)p - (1-t)q$ est une combinaison linéaire de p et q.

c) Soit W l'hyperplan dans $\mathbb{R}^6$ donné par l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$. On considère les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

☐ On peut complèter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.

☐ On peut complèter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.

☐ On peut complèter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.

☐ On peut complèter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.

d) Soit V un espace vectoriel et $v_1, \ldots, v_k$ des vecteurs de V.

☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V = k$.

☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V \geqslant k$.

☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V, alors $\dim V = k$.

☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V, alors $\dim V \geqslant k$.

e) Soit $\mathrm{Tr}\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application linéaire "trace" définie par

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d.$$

☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 1.

☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 2.

☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 3.

☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 4.

f) Soit $\mathrm{Tr}\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application linéaire "trace" définie à la question f. Les matrices suivantes forment une base du noyau de Tr :

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Sol.:

a) ☐ $\mathrm{Ker}A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.

La matrice A représente une application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$. Ainsi $\mathrm{Ker}A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$, pas de $\mathbb{R}^4$. Pour trouver sa dimension il faut échelonner la matrice A. Comme toutes les lignes sont proportionnelles le noyau de A est la solution de l'équation $-x + 3y = 0$, une droite dans le plan.

b) ☐ Les polynômes p et q sont linéairement indépendants.

En effet, bien que $(1+t)p+(1-t)q=0$, ce n'est pas une combinaison **linéaire**, car dans une combinaison linéaire seuls des coefficients réels sont permis, pas des coefficients polynomiaux. Malgré cela ils ne sont pas assez nombreux pour former une base de $\mathbb{P}_2$. Enfin, le polynôme $q-p$ s'annule en 0, mais ce n'est pas le polynôme nul, c'est $2t+2t^2$.

c) ☐ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.

Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont proportionnels, ils sont donc linéairement dépendants et ne peuvent être complétés en une base. Par contre les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ sont linéairement indépendants, ils peuvent donc être complétées en une base de W. Le sous-espace W est donné par une équation à six inconnues. Cinq d'entre elles sont des inconnues secondaires qui jouent le rôle de paramètres, la dimension de W est donc 5.

d) ☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V \geqslant k$.

Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, on peut *compléter* cette famille en une base et cette base aura donc au moins k éléments. Autrement dit, la dimension de V est k au minimum ($\dim V \geqslant k$). Alors que, si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre V, on peut *extraire* une base de cette famille et cette base aura donc au plus k éléments. Autrement dit, la dimension de V est k au maximum ($\dim V \leqslant k$).

e) ☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 3.

Pour avoir $\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=0$, il faut que $a+d=0$, autrement dit que $d=-a$. Ainsi le noyau de l'application Tr correspond au sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

qui est de dimension 3.

f) ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Comme le noyau de Tr est de dimension 3, par la question f., il faut 3 matrices de ce sous-espace pour l'engendrer. De plus, les trois matrices ci-dessus sont linéairement indépendantes et appartiennent au noyau de Tr. Elles forment donc une base du noyau de Tr.

Exercice 10

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -15 & 1 & -9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Est-ce que $\lambda = 6$ est une valeur propre de A ?

b) Même question avec $\lambda = 1$ et $\lambda = -9$.

Sol.:

a) En calculant $A - 6I_3$, on obtient une matrice dont la seconde ligne est nulle, donc une matrice non-inversible. Par conséquent, $\mathrm{Ker}(A-6I_3) \neq \{\overrightarrow{0}\}$ et 6 est une valeur propre.

b) On calcule :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -16 & 1 & -9 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A + 9I_3 = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -9 \\ 0 & 15 & 0 \\ 4 & 1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Les déterminants de ces matrices (en développant par rapport à la deuxième ligne) sont respectivement $5 \cdot (-16 \cdot 2 + 4 \cdot 9)$ et $15 \cdot (-6 \cdot 12 + 4 \cdot 9)$. Ils sont non nuls, par conséquent ces matrices sont inversibles, et ni 1 ni -9 ne sont des valeurs propres.

Exercice 11

Le *polynôme caractéristique* d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est la fonction $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Comme vous le constaterez, c'est en effet toujours un polynôme de degré n. Les valeurs propres de A sont exactement les racines de p_A.

Soient

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$

et $E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres de chacune de ces matrices A, B, C, D, E.

Sol.:

A. Le polynôme caractéristique de A est $\lambda^2 - 5\lambda + 5$. Les valeurs propres de A sont $\{\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\}$. Les vecteurs propres correspondants sont $\left\{\begin{pmatrix} \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

B. Le polynôme caractéristique de B est $(\lambda-4)^2$. Les valeurs propres de B sont $\{4, 4\}$ (il y a une seule valeur propre 4 de multiplicité 2). Vecteurs propres correspondants : $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Remarque : l'espace propre est de dimension seulement 1 alors que la valeur propre est de multiplicité 2, la matrice n'est pas diagonalisable.

C. Le polynôme caractéristique de C est $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = (\lambda-4)(\lambda-1)^2$. Les valeurs propres de C sont $\{4, 1, 1\}$ c-à-d les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire. Les vecteurs propres correspondants sont $\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

D. Le polynôme caractéristique de D est $-\lambda^3 + 36\lambda = -\lambda(\lambda+6)(\lambda-6)$. Les valeurs propres de D sont donc $\{-6, 0, 6\}$. Les vecteurs propres correspondants sont

$\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

E. Le polynôme caractéristique de E est $\lambda^4-10\lambda^3+35\lambda^2-50\lambda+24=(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda-2)$. Les valeurs propres de E sont $\{3,4,1,2\}$ c-à-d les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire. Les vecteurs propres correspondants sont
$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}31\\-34\\6\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}113\\-60\\7\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

<u>Exercices additionnels</u>

Exercice 12

Trouver une base de l'espace engendré par les vecteurs suivants :

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix},\quad \vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\quad \vec{v}_3=\begin{pmatrix}-1\\3\\9\end{pmatrix},\quad \vec{v}_4=\begin{pmatrix}2\\1\\-6\end{pmatrix}.$$

Sol.: On échelonne la matrice constituée des vecteurs colonnes $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$. On trouve :

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&3&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Les colonnes-pivot nous indiquent que les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_4$ sont des vecteurs de base de $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4)$. Autrement dit le vecteur $\vec{v}_3$ est combinaison linéaire des autres vecteurs puisque c'est visiblement le cas de la troisième colonne de la matrice échelonnée d'être combinaison linéaire des autres colonnes de cette matrice échelonnée. Une autre base est donnée par la base canonique de $\mathbb{R}^3$ puisque les vecteurs données engendrent $\mathbb{R}^3$ tout entier.

Exercice 13

Pour chacun des systèmes suivants

1. $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z+3w &=& 13\\ x-2y+z+w &=& 8\\ 3x+y+z-w &=& 1\end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcr} 2x+y+z-2w &=& 1\\ 3x-2y+z-6w &=& -2\\ x+y-z-w &=& -1\\ 6x+z-9w &=& -2\\ 5x-y+2z-8w &=& 3\end{array}\right.$

a) Écrire la matrice augmentée correspondante (pour l'ordre des inconnues x,y,z,w).
b) Mettre cette matrice sous forme échelonnée réduite.
c) Déterminer la solution générale du système.

Sol.: Les matrices augmentées sont

1) $\begin{bmatrix}1&1&2&3&13\\1&-2&1&1&8\\3&1&1&-1&1\end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix}2&1&1&-2&1\\3&-2&1&-6&-2\\1&1&-1&-1&-1\\6&0&1&-9&-2\\5&-1&2&-8&3\end{bmatrix}$

et les matrices sous forme échelonnée réduite correspondantes sont

$$1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad 2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -17/11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9/11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour le premier système, w est une variable libre et la solution est donnée par : $x = -2 + w$, $y = -1$ et $z = 8 - 2w$. Sous forme vectorielle on écrira donc

$$S = \{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid w \in \mathbb{R} \}$$

C'est une droite dans $\mathbb{R}^4$. Le deuxième système n'est pas consistant et donc n'admet pas de solution.

Exercice 14

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecrire l'ensemble solution de l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ sous forme paramétrique vectorielle.

Sol.: Pour réduire la matrice A qui est déjà échelonnée, il suffit d'effectuer deux opérations : $L_1 + 2L_3$ et $L_2 - 6L_3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit ici qu'il y a trois inconnues principales, celles des colonnes pivot, x_1, x_3 et x_6, et 3 inconnues libres (x_2, x_4 et x_5) que l'on utilise comme paramètres pour décrire la solution générale du système :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour } s, t, u \in \mathbb{R}$$
