Série 5 (Corrigé)

Cette série suit les chapitres 1 et 2 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *injective, surjective, bijective, matrice canoniquement associée, calcul matriciel*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants si

☐ $b = 1$ ☐ $b = 2$ ☐ $b = 3$ ☐ $b = 4$

Sol.: $b = 4$

Exercice 2

Trouver les matrices correspondant aux transformations linéaires suivantes (exprimées dans la base canonique) :

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Sol.:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice 3

Dans les cas suivants, écrire la matrice canonique correspondant à la transformation, et déterminer si la transformation est injective, surjective ou bijective.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

Sol.:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, injective (les colonnes sont linéairement indépendantes). Non surjective, car seulement deux vecteurs ne peuvent engendrer $\mathbb{R}^3$. Donc non bijective.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, surjective (l'image est $\mathbb{R}$), non injective (plus de colonnes que de lignes). Donc non bijective.

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, injective, surjective et bijective (en permutant les lignes 1 et 3, on trouve la matrice identité).

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, rien (non injective car $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est envoyé sur zéro, et non surjective, car les vecteurs de l'image satisfont $x_1 = x_2$).

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, injective, surjective et bijective.

f) T n'est pas une transformation linéaire, il est impossible de la représenter canoniquement par une matrice.

Exercice 4

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une transformation linéaire. Montrer qu'une condition nécessaire pour que T soit bijective est $n = m$.

Sol.:

Supposons T bijective. Considérons A la matrice canonique associée à T. Comme T est surjective (l'image de T recouvre tout $\mathbb{R}^m$), l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ possède une solution pour tout $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$, et les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$, ainsi on a $n \geq m$. Comme T est injective, l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ possède uniquement la solution triviale, ce qui signifie que les colonnes de A sont linéairement indépendantes. Ceci implique $n \leq m$. On a donc $n = m$.

Exercice 5

a) Déterminer si les transformations linéaires suivantes sont injectives ou surjectives :

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, T\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\5\end{pmatrix}$ et $T\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\-6\\1\\0\end{pmatrix}$.

   (b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, T\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_2+x_3\\x_3+x_4\\0\end{pmatrix}$.

   (c) La rotation dans $\mathbb{R}^3$ d'axe Oz et d'angle 60^o (dans le sens trigonométrique).

b) Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Démontrer que si T est surjective alors elle est aussi injective.

Sol.:

a) Rappelons qu'une transformation linéaire est surjective si la matrice associée, après échelonnage, possède un pivot dans chaque ligne ; une transformation linéaire est injective si la matrice associée, après échelonnage, a un pivot dans chaque colonne.
   Ainsi :

   (a) La matrice associée est
   $$\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & -6\\0 & 1\\5 & 0\end{pmatrix},$$
   la transformation linéaire est injective mais pas surjective ;

   (b) La matrice associée est
   $$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$
   la transformation linéaire n'est ni injective, ni surjective.

(c) La matrice de rotation a visiblement un pivot dans chaque ligne et dans chaque colonne puisque les deux premières lignes ne sont pas proportionnelles. Une telle rotation est donc injective et surjective, ce qui confirme notre intuition géométrique.

b) Soit A la matrice – carrée $n \times n$ – de l'application linéaire T. Cette application linéaire est surjective si et seulement si le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ admet une solution pour tout vecteur $\overrightarrow{b}$ de $\mathbb{R}^n$, ce qui signifie que le système est compatible. L'algorithme de réduction (ou méthode pivot, ou de Gauss) nous a appris que tel est le cas exactement lorsque la matrice A sous sa forme échelonnée et réduite a un pivot dans chaque ligne.
Pour montrer que T est injective, il suffit de montrer que le système *homogène* $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ admet une unique solution. Or, la matrice A étant carrée, elle a un pivot dans chaque ligne si et seulement si elle a un pivot dans chaque colonne ! Par conséquent chaque inconnue est de base (ou principale). Autrement dit la seule solution du système homogène est la solution triviale $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Nous avons prouvé que T est injective.

En fait une telle application T est injective si et seulement si elle est surjective.

Exercice 6

Déterminer lesquelles des applications suivantes sont linéaires et donner la matrice associée lorsque cela est possible :

a) $\begin{aligned} T : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin x \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} T : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (x, x^2) \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} T : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + y \,,\, 2x - 3y) \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} T : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2x - z \,,\, x + y) \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} T : \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z, u) &\longmapsto (2x + u \,,\, y - z + 1) \end{aligned}$

Sol.:

a) L'application $T(x) = \sin x$ n'est pas linéaire car

$$T(\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}) = T(\pi) = \sin \pi = 0$$
$$T(\tfrac{\pi}{2}) + T(\tfrac{\pi}{2}) = \sin \tfrac{\pi}{2} + \sin \tfrac{\pi}{2} = 2 \neq 0$$

b) L'application $T(x) = (x, x^2)$ n'est pas linéaire car

$$T(\lambda x) = (\lambda x \,,\, \lambda^2 x^2)$$
$$\lambda T(x) = \lambda(x, x^2) = (\lambda x \,,\, \lambda x^2) \neq T(\lambda x) \qquad \text{sauf si } \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 0.$$

c) L'application $T(x,y) = (x+y\,,\,2x-3y)$ est linéaire. En effet, si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ nous avons

$$T(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} (x_1+x_2)+(y_1+y_2) \\ 2(x_1+x_2)-3(y_1+y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1+y_1)+(x_2+y_2) \\ (2x_1-3y_1)+(2x_2-3y_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ 2x_1-3y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2+y_2 \\ 2x_2-3y_2 \end{pmatrix}$$

$$= T(\overrightarrow{u}) + T(\overrightarrow{v})\,,$$

$$T(\lambda\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} \lambda x_1+\lambda y_1 \\ 2\lambda x_1-3\lambda y_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ 2x_1-3y_1 \end{pmatrix} = \lambda T(\overrightarrow{u})\,.$$

Comme $T(1,0) = (1,2)$ et $T(0,1) = (1,-3)$, la matrice associée à T est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\,.$$

d) L'application $T(x,y,z) = (2x-z\,,\,x+y)$ est linéaire (calcul analogue à celui de la partie c)). Comme $T(1,0,0) = (2,1)$, $T(0,1,0) = (0,1)$ et $T(0,0,1) = (-1,0)$, la matrice associée à est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

e) L'application $T(x,y,z,u) = (2x+u\,,\,y-z+1)$ n'est pas linéaire car

$$T(0,0,0,0) = (0,1) \neq (0,0)\,.$$

Exercice 7

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire et A la matrice canoniquement associée.

Prouver les affirmations suivantes

a) *T est surjective si et seulement si les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$;*

b) *T est injective si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.*

Sol.:

a) Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$ si et seulement si pour tous $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$, l'équation matricielle $A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{b}$ admet une solution. Or $A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{b}$ est équivalent à $T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{b}$. Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$ si et seulement si pour tous $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$, l'équation $T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{b}$ admet une solution. Ce qui revient à dire que T est surjective.

b) Les colonnes de A sont linéairement indépendantes si et seulement si l'équation $A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ n'admet que la solution triviale. Ceci découle de la définition de l'indépendance linéaire. Denouveau $A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et $T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$ sont équivalentes. Ainsi les colonnes de A sont linéairement indépendantes si et seulement si l'équation $T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$ n'admet que la solution triviale. Comme l'équation $T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$ n'admet que la solution triviale, T est injective.

Exercice 8

Calculer la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+3y+5z+7u \\ -x+3y \\ x+2y+3z+7u \end{pmatrix}$$

et déterminer si l'application est injective, surjective ou bijective.

Sol.: Pour gagner de la place dans le corrigé, on utilise la notation vecteur-ligne. Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$T(x, y, z, u) = (x + 3y + 5z + 7u\ ,\ -x + 3y\ ,\ x + 2y + 3z + 7u)\,.$$

Nous avons

$$\begin{cases} T(1,0,0,0) = (1,-1,1) \\ T(0,1,0,0) = (3,3,2) \\ T(0,0,1,0) = (5,0,3) \\ T(0,0,0,1) = (7,0,7) \end{cases} \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Comme il n'y a pas un pivot par colonne, l'application linéaire n'est pas injective.
- Comme il y a un pivot par ligne, l'application linéaire est surjective.
- Comme l'application linéaire n'est pas injective, elle n'est pas bijective.

Exercice 9

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Si une matrice A est de taille $m \times n$ alors l'image de la transformation $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est contenue dans $\mathbb{R}^n$.	☐	☐
b) Chaque transformation linéaire est une transformation matricielle.	☐	☐
c) La transformation $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = mx^2 + b$ est linéaire pour $b = 0$.	☐	☐
d) Une transformation linéaire préserve les opérations d'addition vectorielle et de multiplication par un scalaire.	☐	☐
e) Chaque transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ est une transformation linéaire.	☐	☐

Sol.:

a) Faux. Si une matrice A est de taille $m \times n$ alors l'image de la transformation $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est contenue dans $\mathbb{R}^m$ et non pas $\mathbb{R}^n$.

b) Faux. Chaque transformation matricielle est une transformation linéaire, mais l'inverse est faux, cf. plus bas pour une solution détaillée.

c) Faux. La transformation $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = mx^2$ n'est pas linéaire si $m \neq 0$ (si $m = 0$ elle est banalement linéaire). En effet $f(x + y) = m(x + y)^2 = m(x^2 + 2xy + y^2) \neq mx^2 + mxy^2$ si x, y et m sont $\neq 0$.

d) Vrai. Par définition, une transformation linéaire préserve les opérations d'addition vectorielle et de multiplication par un scalaire.

e) Faux. Par exemple, la transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(x, y) = (x^2, y^2)$ n'est pas linéaire.

Solution pour b) : L'exemple suivant nous donne une transformation linéaire mais non matricielle : soit $C([0, 1])$ l'ensemble des fonctions continues $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Définissons la transformation

$$T : C([0, 1]) \to \mathbb{R} \quad \text{telle que} \quad T(f) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Elle est linéaire, car $T(f+g) = T(f) + T(g)$ et $T(\lambda f) = \lambda T(f)$, mais il n'existe pas une matrice associée.

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Si la matrice échelonnée-réduite associée à un système d'équations linéaires homogènes à m équations et n inconnues possède r pivots, alors le système a $n-r$ variables libres. ☐ ☐

b) Si un système d'équations linéaires homogènes possède plus d'inconnues que d'équations, alors il a une infinité de solutions. ☐ ☐

c) Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$, alors $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. ☐ ☐

d) Si le vecteur $\vec{v}_4$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$, alors le vecteur $\vec{v}_1$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$. ☐ ☐

Sol.:

a) Vrai. Par définition d'une variable libre, il s'agit d'une variable qui n'a pas de position pivot. Comme ici nous avons n variables et r pivots, il y a r variables liées et donc $n-r$ variables libres.

b) Vrai. Nommons n le nombre d'inconnues et m le nombre d'équations de ce système. La matrice échelonnée-réduite associée à ce système possède r pivots avec $r \leqslant m$ et on a donc $n-r$ variables libres. Puisque $n > m$ et $r \leqslant m$ on a que $n-r > 0$ et donc le système possède au moins une variable libre. Comme le système est homogène il possède soit une seule solution (la solution triviale) soit une infinité (correspondant aux valeurs données aux éventuelles variables libres).

c) Faux. Prenons par exemple $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs sont non nuls mais $\vec{w}$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

d) Faux. Prenons par exemple $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dans ce cas on a bien que $\vec{v_4}$ est combinaison linéaire de $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ (et banalement $\vec{v_3}$), tandis que $\vec{v_1}$ n'est pas combinaison linéaire des 3 autres vecteurs.

Exercice 11

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits suivants (s'ils existent). Si les produits n'existent pas, expliquer pourquoi.

a) AB, BA, AC, CA, BC, CB, CD, EC, EA

b) AA^T, A^TA, BA^T, BC^T, C^TA, BD^T, D^TB

Sol.:

a) $AB = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$, AC n'existe pas : $(2 \times 3) \times (2 \times 2)$, $CA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$,

$BC = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 6 & 12 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$, CB n'existe pas : $(2 \times 2) \times (3 \times 2)$, CD n'existe pas : $(2 \times 2) \times (3 \times 1)$,

$EC = \begin{pmatrix} 9 & 15 \end{pmatrix}$, $EA = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

b) $AA^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, BA^T n'existe pas : $(3 \times 2) \times (3 \times 2)$, $BC^T = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 10 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$, $C^T A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, BD^T n'existe pas : $(3 \times 2) \times (1 \times 3)$, $D^T B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$.

<u>Exercices additionnels</u>

Exercice 12

Laquelle des colonnes de la matrice suivante n'est pas une colonne-pivot ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- ☐ la première,
- ☐ la deuxième,
- ☐ la troisième,
- ☐ la quatrième.

Sol.: Dans cet exercice à choix multiple il s'agit encore une fois d'effectuer des opérations sur les lignes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{L2}\leftrightarrow\text{L1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{\text{L3}-\text{L1} \\ \text{L4}-\text{L1}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{\text{L3}-2\text{L2} \\ \text{L4}-2\text{L2}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

On voit donc que c'est la troisième colonne qui ne contient pas de pivot. Remarquons qu'il y a des choix plus économiques pour échelonner et réduire cette matrice, si on avait voulu résoudre le système associé (ce qui n'est pas le cas).

Exercice 13

a) Pour quelle valeur de h la matrice suivante est-elle la matrices augmentée d'un système linéaire compatible (consistant) :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{array}\right)$$

☐ $h = 5$,

☐ $h = 5/2$,

☐ $h \neq 5/2$,

☐ $h = -5/2$.

b) Même question pour la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{array}\right).$$

☐ $h = 2$,

☐ $h = -2$,

☐ $h \neq 2$,

☐ $h \neq -2$.

Sol.:

a) On a l'équivalence

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{array}\right) \sim_{L_2+2L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ 0 & 0 & 2h-5 \end{array}\right).$$

Le système linéaire correspondant à cette matrice est :

$$\begin{aligned} x - 3y &= h \\ 0 &= 2h - 5, \end{aligned}$$

il est consistant si et seulement si $2h - 5 = 0$, c'est-à-dire si $h = 5/2$.

b) On a l'équivalence :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{array}\right) \sim_{-L_2+3L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & h & 4 \\ 0 & 3h-6 & 4 \end{array}\right).$$

Le système linéaire correspondant à la dernière matrice est

$$\begin{aligned} x + hy &= 4 \\ (3h-6)y &= 4\,. \end{aligned}$$

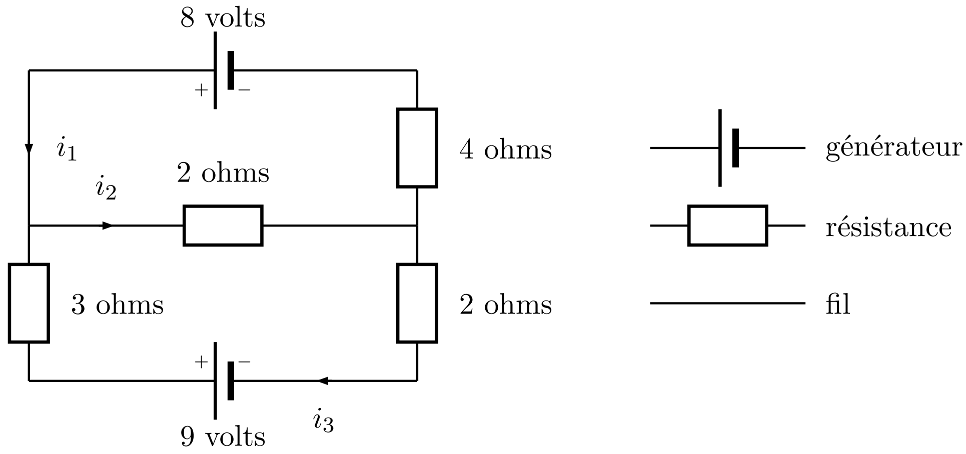
Il est consistant si et seulement si $3h - 6 \neq 0$, c'est à dire si $h \neq 2$.

Exercice 14

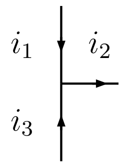
<u>Les deux lois de Kirchhoff</u>

1. À chaque nœud (embranchement) d'un circuit électrique, la somme des courants (intensités) qui entrent dans le nœud est égale à la somme des courants qui en sortent.
2. La somme des tensions (différences de potentiels) le long de tout circuit fermé est nulle (l'augmentation du potentiel est comptée avec $+$ et la diminution avec $-$).

On rappelle que la chute de potentiel U dans une résistance R traversée par un courant d'intensité I est donnée par la loi d'Ohm $U = RI$.
Déterminer les intensités i_1, i_2, i_3 dans le circuit suivant.



Sol.: Appliquons la 1ère loi de Kirchhoff au nœud situé au dessus de la résistance de 3 ohms.



$$i_1 + i_3 = i_2.$$

Appliquons la seconde loi de Kirchhoff à la boucle du haut (sens anti-horaire, en partant du générateur) :

$$8 - 2i_2 - 4i_1 = 0.$$

De même avec la boucle du bas (maintenant dans le sens horaire) :

$$9 - 3i_3 - 2i_2 - 2i_3 = 0.$$

La matrice augmentée du système et sa forme échelonnée réduite sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & -2 & -5 & -9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où la solution :

$$i_1 = 1, \qquad i_2 = 2, \qquad i_3 = 1.$$