Chapitre Rappels

8.1 Systèmes d'équations linéaires et Gauss-Jordan

Un *système d'équations linéaires* aux inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ est :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = & b_m \end{cases}$$

où $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$. On a $n =$ nombre d'inconnues et $m =$ nombre d'équations.

Pour résoudre le système on écrit la matrice augmentée et on échelonne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

par ex

$$\sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 1 & 1 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right)$$

colonnes pivots — pas pivots

pivots = variables principales

non-pivots = variables libres

système consistant si on a pas de ligne $(0 \dots 0 \mid *)$ avec $* \neq 0$.

Théorème 1. *Un système d'équations linéaires à n inconnues à coefficients réels satisfait exactement une seule des situations suivantes :*

1. il possède une solution unique
2. il possède une infinité de solutions } consistant
3. il ne possède aucune solution } inconsistant

Rmq : • si chaque ligne possède un pivot (de la matrice des coeff.)

On aura un système consistant.

• si on a une variable libre, on écrit la solution sous forme paramétrée :

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$t, r \in \mathbb{R}$.

Un système est dit *homogène* si tous les termes de droite (b_i) sont nuls. Une solution est dite triviale si elle est nulle.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{array}\right)$$

On a toujours $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ qui est une sol. de $A\vec{x} = \vec{0}$, A $m \times n$.

Donc les systèmes homogènes sont consistants,

- soit une unique sol. (donc $\vec{0}$)
- soit une infinité de solution.

8.2 Espace vectoriel

Un *espace vectoriel* est un ensemble non-vide V composé d'éléments sur lesquels on définit une opération d'addition $+$ et une opération de multiplication par un scalaire $\cdot$, notées

$$+ : \begin{array}{rcl} V \times V & \to & V \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array} \qquad \cdot : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times V & \to & V \\ (\lambda, v) & \mapsto & \lambda v \end{array}$$

et qui doivent vérifier les 10 axiomes.

$W \subset V$ est un sous-EV de V si les 3 axiomes ci-dessous sont vérifiés : $\forall u, v \in W, \alpha \in \mathbb{R}$
$u + v \in W$, $\alpha u \in W$, et $0_V \in W$

Rmq : on doit avoir $0_V \in W$ sinon on a un problème avec les 2 autres axiomes.
On a $\alpha u \in W$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Donc si $\alpha = 0$ on $0 \cdot u \in W$ or $0 \cdot u = 0_V$ Donc on doit avoir $0_V \in W$.

<u>Exemple</u> : $\mathbb{P}$ est un EV

$\mathbb{P}_n = \{ p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \mid a_i \in \mathbb{R} \}$

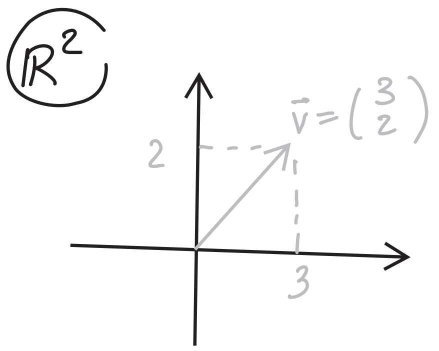
est un sous-EV de $\mathbb{P}$. C'est aussi un EV.

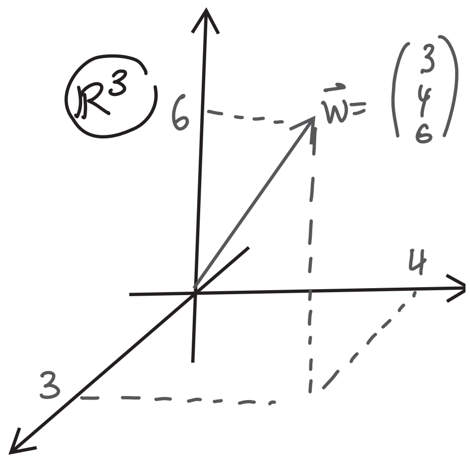
$\mathbb{R}^n$ est un EV.

$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ sont des EV.

$\mathbb{R}^2$ n'est pas un sous-EV de $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2$ n'est pas un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2 \not\subset \mathbb{R}^3$!





Exemple Soient les sous-ensembles ci-dessous de $\mathbb{R}^2$. Lesquels sont des sous-EV ?

$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ oui $\qquad E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \sin(a) \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ non

$E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ non $\qquad E_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ non

$E_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid ab \geq 0, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ non $\qquad E_6 = \left\{ \begin{pmatrix} -a/2 \\ 10a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ oui

<u>E_1</u> : oui, c'est le plus petit de $\mathbb{R}^2$

<u>E_2</u> : $\vec{0} \in E_2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a \\ \sin(a) \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ \sin(b) \end{pmatrix}}_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} a+b \\ \sin(a)+\sin(b) \end{pmatrix}$$

or $\sin(a) + \sin(b) \neq \sin(a+b)$. Donc

$\vec{u} + \vec{v} \notin E_2$.

<u>E_3</u> : $\vec{0} \notin E_3$.

<u>E_4</u> : $\vec{0} \in E_4$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ b^2 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ a^2+b^2 \end{pmatrix}$$ on prend $c = \sqrt{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$

on a $\vec{u}+\vec{v} \in E4$.

$\alpha \vec{u} \overset{?}{\in} E4$: $(-1)\begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a^2 \end{pmatrix} \notin E_4$.

$\underline{E5}$: $\vec{0} \in E5$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}}_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

on peut prendre : $\underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}}_{(-3)(-2)=6} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{1.3\geqslant 0} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{(-2).1<0}$

$\underline{E6}$: oui

Dimension d'un espace vectoriel

Soient $v_1, \ldots, v_p$ des éléments de V. L'*ensemble des combinaisons linéaires* de $v_1, \ldots, v_p$ s'appelle le *span*, c'est un sous-EV de V et on le note

$$\text{span}\{v_1, v_2 \ldots, v_p\} = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}$$

On dira que $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une *famille génératrice* de span$\{v_1, v_2 \ldots, v_p\}$.

<u>Rmq</u> : si $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est génératrice elle est pas lin. indép., ni une base.

- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ mais pas lin indép.

- $\{1, 1+t, t^2, \overbrace{1+t+t^2}^{\text{est superflu}}\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{P}_2$.

soit $q(t) \in \mathbb{P}_2$ $\quad q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$

on peut l'écrire comme comb. linéaire de $1, 1+t, t^2, 1+t+t^2$.

Dimension d'un espace vectoriel

Soient $v_1, \ldots, v_p$ des éléments de V. L'*ensemble des combinaisons linéaires* de $v_1, \ldots, v_p$ s'appelle le *span*, c'est un sous-EV de V et on le note

$$\text{span}\{v_1, v_2 \ldots, v_p\} = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}$$

On dira que $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une *famille génératrice* de $\text{span}\{v_1, v_2 \ldots, v_p\}$.

Rmq : une famille génératrice $\{v_1, .., v_p\}$ n'est pas forcément lin. indép, ni une base.

- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\text{superflu}} \right\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ mais elle n'est pas lin. indép. ni une base de $\mathbb{R}^3$.

- $\{1, 1+t, t^2, \overbrace{1+t+t^2}^{\text{superflu}}\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{P}_2$. En effet : soit $q(t) \in \mathbb{P}_2$ $q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. On peut l'écrire comme une comb. linéaire de $1, 1+t, t^2, 1+t+t^2$. Par contre $1+t+t^2$ est superflu. La famille n'est pas lin indép. ni une base de $\mathbb{P}_2$

Soit V un espace vectoriel. Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_p\}$ un famille d'éléments de V. Alors $\mathcal{B}$ est une *base* de V si

1. $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de V
2. $\mathcal{B}$ est une famille linéairement indépendante.

La dimension d'un EV est égale au nombre d'éléments dans une base.
Toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

Ex :
- $V = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim V = 2$.
- $V = \text{span}\{1, 1+t, 1+t^2\}$, $\dim V = 3$
- $V = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{⚠} \right\}$, $\dim V = 3$

  ici $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ s'écrit comme comb lin des 3 autres.
  Donc $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ n'est pas une base de V.

- $V = \{\vec{0}\}$ $\dim V = 0$.
- $V = \emptyset$ n'a pas de dimension

c'est 2 EV différents !

Exemple

Soit $V = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \middle| \ v_4 = 0 \right\}$. Trouver la dimension de V.

Soit $\vec{v} \in V$: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$\vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On échelonne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & v_1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & v_2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & v_3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & v_1 - v_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -v_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_3 + v_1 + v_2 \end{array}\right)$$

le système est compatible ssi $v_3 + v_1 + v_2 = 0$.

Donc $\vec{v} \in V$ si $v_4 = 0$ et $v_3 + v_1 + v_2 = 0$

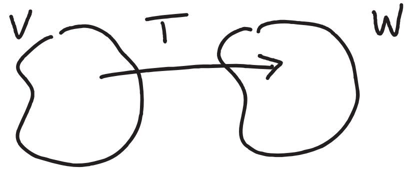
$\Rightarrow v_4 = 0$ et $v_3 = -v_1 - v_2$

On a $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -v_1 - v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $V = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ et $\dim V = 2$.

⚠ $\text{Im}(A) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \neq V$.

8.3 Image, noyau, application



Soient V et W deux espaces vectoriels. Soit $T : V \to W$. T est une *application linéaire* si elle associe à tout élément v de V un unique élément $T(v)$ de W et si T vérifie, $\forall u, v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

Soient V, W des EV et $T : V \to W$ une application linéaire.
Le *noyau de l'application* T, noté $\text{Ker}(T)$ est l'ensemble des solutions de $T(x) = 0_W$. On le note

$$\text{Ker}(T) = \{x \in V \mid T(x) = O_W\} \subseteq V$$

L'*image de l'application* T, notée $\text{Im}(T)$ est définie par

$$\text{Im}(T) = \{b \in W \mid \exists x \in V : T(x) = b\} \subseteq W$$

Cas particuliers : $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, linéaire. Alors il existe une unique matrice A tq $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ (Thm 10) canoniquement associée.

Dans ce cas $\text{Im}(T) = \text{Im}(A)$, $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(A)$.

⚠ si $W = \mathbb{P}_2$ par exemple, il faut exprimer $\text{Im}(T)$ dans $\mathbb{P}_2$ et pas donner des vecteurs colonnes !

Question 9 : Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6x_1 \\ -12x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 6x_4 \\ -24x_1 + 18x_3 \\ -12x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 6x_4 \end{pmatrix}.$$

Alors

☐ $\operatorname{Im} T = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. ☒ $\operatorname{Im} T = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$.

☐ $\operatorname{Im} T = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. ☐ $\operatorname{Im} T = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 6 & -3 & 6 \\ -24 & 0 & 18 & 0 \\ -12 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix}\right\}$

car $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ etc. $\longrightarrow = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$

Pour trouver la réponse, on devait prendre des multiples des vecteurs.

Des fois, ça ne nous aide pas .... que faire dans ce cas ?

On peut utiliser l'espace des lignes (....)

On sait que si $A \sim B$ on a $\operatorname{Lgn}(A) = \operatorname{Lgn}(B)$.

On sait aussi que $\operatorname{Im}(A^T) = \operatorname{Lgn}(A)$

Ici notre A sera (une nouvelle matrice A) :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -12 & 6 & -3 \\ -24 & 0 & 18 \\ -12 & 6 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 6 & -12 & -24 & -12 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 18 & 6 \end{pmatrix}$$

On applique des opérations élém sur A^T, et cela ne change pas $\operatorname{Lgn}(A^T)$ ← $\operatorname{Lgn}(A^T) = \operatorname{Im}(A)$ c'est ce qu'on cherche !

$$\begin{pmatrix} 6 & -12 & -24 & -12 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 18 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \end{pmatrix} \sim \dots$$

on trouve une inf. de bases pour $\operatorname{Im}(A)$.

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix}\right\} = \underbrace{\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}}_{\text{la réponse.}}$$

$$= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}\right\} = \dots$$

Théorème du rang

1. Soit A une matrice $m \times n$. Alors
$$\operatorname{rang}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = n$$
2. Soit $T : V \to W$ où V, W sont des espaces vectoriels avec $\dim V = n$. Alors
$$\operatorname{rang}(T) + \dim \operatorname{Ker}(T) = n$$

Soit A $m \times n$ on aura

$$\underbrace{\text{rang}(A)}_{\text{nbre colonnes pivots}} + \underbrace{\dim \text{Ker}(A)}_{\text{nbre colonnes non-pivots}} = n$$

nbre colonnes pivots + nbre colonnes non-pivots = nbre colonnes.

On a aussi $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$.

Mais ⚠ ça ne veut pas dire que $\text{Im}(A) = \text{Im}(A^T)$ seulement que leur dimension est la même.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 3×2, $\text{rang}(A) = 2$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\text{rang}(A^T) = 2$

mais $\text{Im}(A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ et

$\text{Im}(A^T) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

On a $\text{Im}(A) \neq \text{Im}(A^T)$, c'est PAS les mêmes EV!!

(un vit dans $\mathbb{R}^2$ et l'autre dans $\mathbb{R}^3$!!!)

Question 6 : Soit A une matrice de taille $m \times n$ telle que $A\vec{x} = \vec{b}$ possède au moins une solution pour tout choix de $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Alors il est toujours vrai que

- ☐ ~~$\dim(\text{Im}(A^T)) = n$.~~ un cas particulier pour $n=m$ donc FAUX
- ☒ $A^T\vec{y} = \vec{0}$ possède une solution unique.
- ☐ ~~$\dim(\text{Ker}(A)) = 0$.~~ un cas particulier pour $n=m$ donc FAUX
- ☐ ~~$A^T\vec{y} = \vec{c}$ possède au moins une solution pour tout choix de $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$.~~

A $m\times n$, $A\vec{x} = \vec{b}$ compatible $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$

Donc $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^m$ et $\text{rang}(A) = m$

Par le Thm du rang : $\dim \text{Ker}(A) + \underbrace{\text{rang}(A)}_{=m} = n$

$\Rightarrow \dim \text{Ker}(A) = n - m$

Comme, a priori : $n \neq m$ on a $\dim \text{Ker}(A) \neq 0$

Comme $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T) \Rightarrow \dim \text{Im}(A^T) = m$

et a priori, $n \neq m$ donc $\text{rang}(A^T) \neq n$

On a aussi que $m \leq n$ car $\dim \text{Ker}(A)$ ne peut pas être négative.

Comme $\text{Im}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\text{rang}(A^T) = m$

on a que $A^T\vec{y} = \vec{c}$ n'est pas forcément compatible (si $m < n$ par exemple)

Par le Thm du rang sur A^T: $\dim \text{Ker}(A^T) = m - \text{rang}(A^T) = 0$

Donc $A^T\vec{y} = \vec{0}$ admet une unique solution

Soient $E = (1, t)$ et $\mathcal{B} = (1, 1+2t)$ deux bases de $\mathbb{P}_1$. Soit $q(t) = -1 + 4t$.

Alors $[q(t)]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \leftarrow -1 \cdot 1 + 4 \cdot t$

coeff de la comb. linéaire

$[\cdot]_E$ facile à obtenir.

On cherche $[q(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. On doit trouver α, β tq $q(t) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot (1 + 2t)$

$\Leftrightarrow \quad -1 + 4t = \alpha + \beta(1 + 2t)$

on doit égaliser les coeff des termes de même degré

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ 2\beta = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad [q(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dans E: $[q(t)]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Dans $\mathcal{B}$: $[q(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

les 2 représentent le même polynôme $-1 + 4t$.

Question 17 : Soient $\mathcal{B} = (\underbrace{1+3t}_{b_1}, \underbrace{2+t^2}_{b_2}, \underbrace{4+t+3t^2}_{b_3})$ et $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$ deux bases ordonnées de $\mathbb{P}_2$. Si la matrice P représente la matrice de changement de base telle que $[q]_{\mathcal{C}} = P[q]_{\mathcal{B}}$ pour tout $q \in \mathbb{P}_2$, alors

- [ ] $p_{12} = 4$.
- [ ] $p_{12} = 3$.
- [ ] $p_{12} = 0$.
- [x] $p_{12} = 2$.

La matrice de changement de base est

$$P = \left([b_1]_C \quad [b_2]_C \quad [b_3]_C \right)$$

On cherche p_{12} : 2ème colonne, première ligne.

$b_2 = 2 + t^2 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot t + \gamma t^2$

et $[b_2]_C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

On a $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$.

La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Question 6 : Soit $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a-d & b+c \\ c-b & a+d \end{pmatrix}.$$

La matrice M de T par rapport à la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, telle que $[T(A)]_{\mathcal{B}} = M[A]_{\mathcal{B}}$ pour tout $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, est

- ☐ $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☒ $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$M = \left([T(B_1)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_2)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_3)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_4)]_{\mathcal{B}} \right)$$

$$= \left(\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} \quad \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} \quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} \quad \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} \right)$$

On doit écrire les 4 matrices comme comb. linéaire des matrices de $\mathcal{B}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On fait de même pour les autres :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$