

Chapitre Rappels

8.1 Systèmes d'équations linéaires et Gauss-Jordan

Un *système d'équations linéaires* aux inconnues x_1, x_2, \dots, x_n , $n \in \mathbb{N}^*$ est :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

où $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$. On a $n =$ nombre d'inconnues et $m =$ nombre d'équations.

Pour résoudre le système on écrit la matrice augmentée et on échelonne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Théorème 1. *Un système d'équations linéaires à n inconnues à coefficients réels satisfait exactement une seule des situations suivantes :*

1. il possède une solution unique
 2. il possède une infinité de solutions
 3. il ne possède aucune solution
- } consistant
- } inconsistent

Un système est dit *homogène* si tous les termes de droite (b_i) sont nuls. Une solution est dite triviale si elle est nulle.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{array} \right)$$

8.2 Espace vectoriel

Un *espace vectoriel* est un ensemble non-vide V composé d'éléments sur lesquels on définit une opération d'addition $+$ et une opération de multiplication par un scalaire \cdot , notées

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times V &\rightarrow V \\ (\lambda, v) &\mapsto \lambda v \end{aligned}$$

Exemple Soient les sous-ensembles ci-dessous de \mathbb{R}^2 . Lesquels sont des sous-EV ?

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} & E_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \sin(a) \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \\ E_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} & E_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \\ E_5 &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid ab \geq 0, a, b \in \mathbb{R} \right\} & E_6 &= \left\{ \begin{pmatrix} -a/2 \\ 10a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Dimension d'un espace vectoriel

Soient v_1, \dots, v_p des éléments de V . L'ensemble des combinaisons linéaires de v_1, \dots, v_p s'appelle le *span*, c'est un sous-EV de V et on le note

$$\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_p\} = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p \mid \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}$$

On dira que $\{v_1, \dots, v_p\}$ est une *famille génératrice* de $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$.

Soit V un espace vectoriel. Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ un famille d'éléments de V . Alors \mathcal{B} est une *base* de V si

1. \mathcal{B} est une famille génératrice de V
2. \mathcal{B} est une famille linéairement indépendante.

Exemple

Soit $V = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \mid v_4 = 0 \right\}$. Trouver la dimension de V .

8.3 Image, noyau, application

Soient V et W deux espaces vectoriels. Soit $T : V \rightarrow W$. T est une *application linéaire* si elle associe à tout élément v de V un unique élément $T(v)$ de W et si T vérifie, $\forall u, v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

Soient V, W des EV et $T : V \rightarrow W$ une application linéaire.

Le *noyau de l'application* T , noté $\text{Ker}(T)$ est l'ensemble des solutions de $T(x) = 0_W$. On le note

$$\text{Ker}(T) = \{x \in V \mid T(x) = 0_W\}$$

L'*image de l'application* T , notée $\text{Im}(T)$ est définie par

$$\text{Im}(T) = \{b \in W \mid \exists x \in V : T(x) = b\}$$

Question 9 : Soit $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 6x_1 \\ -12x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 6x_4 \\ -24x_1 + 18x_3 \\ -12x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 6x_4 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \square \operatorname{Im} T &= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. & \square \operatorname{Im} T &= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}. \\ \square \operatorname{Im} T &= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. & \square \operatorname{Im} T &= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Théorème du rang

1. Soit A une matrice $m \times n$. Alors

$$\text{rang}(A) + \dim \text{Ker}(A) = n$$

2. Soit $T : V \rightarrow W$ où V, W sont des espaces vectoriels avec $\dim V = n$.
Alors

$$\text{rang}(T) + \dim \text{Ker}(T) = n$$

Question 6 : Soit A une matrice de taille $m \times n$ telle que $A\vec{x} = \vec{b}$ possède au moins une solution pour tout choix de $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Alors il est toujours vrai que

$\dim(\text{Im}(A^T)) = n$.

$A^T\vec{y} = \vec{0}$ possède une solution unique.

$\dim(\text{Ker}(A)) = 0$.

$A^T\vec{y} = \vec{c}$ possède au moins une solution pour tout choix de $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$.

8.4 Changements de bases

Question 17 : Soient $\mathcal{B} = (1 + 3t, 2 + t^2, 4 + t + 3t^2)$ et $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$ deux bases ordonnées de \mathbb{P}_2 . Si la matrice P représente la matrice de changement de base telle que $[q]_{\mathcal{C}} = P[q]_{\mathcal{B}}$ pour tout $q \in \mathbb{P}_2$, alors

$p_{12} = 4.$

$p_{12} = 3.$

$p_{12} = 0.$

$p_{12} = 2.$

Question 6 : Soit $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a-d & b+c \\ c-b & a+d \end{pmatrix}.$$

La matrice M de T par rapport à la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, telle que $[T(A)]_{\mathcal{B}} = M[A]_{\mathcal{B}}$ pour tout $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, est

$$\square M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\square M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\square M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\square M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$