Série 9

Cette série suit le chapitre 4 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *bases, coordonnées, changement de base*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Definition 1.1 (dimension) Soit V un espace vectoriel.

1. si V a une famille génératrice avec un nombre fini d'éléments, on dira que V est de dimension finie. On note sa dimension avec $\dim V$ et $\dim V$ est égal au nombre d'éléments dans chaque base de V (chaque base aura le même nombre d'éléments).
2. si V n'admet pas de famille génératrice finie, on dira que V est de dimension infinie. Dans ce cas $\dim V = \infty$
3. si $V = \{0_V\}$ on a $\dim V = 0$.

On a

$$\dim \mathrm{Im}(A) = \text{nombre de colonnes pivots}$$
$$\dim \mathrm{Ker}(A) = \text{nombre de colonnes non-pivots.}$$

Definition 1.2 (rang) Soient V, W des espaces vectoriels et soit $T : V \to W$ une transformation linéaire. On appelle *rang* de T, la dimension de $\mathrm{Im}(T)$. On a

$$\mathrm{rang}(T) = \dim \mathrm{Im}(T)$$

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire, il existe une unique matrice A tell que $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$. On a $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(A)$ et alors $\mathrm{rang}(T) = \mathrm{rang}(A)$. On parlera alors du rang de la matrice A.

Exercice 1

a) On considère le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Trouver les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2)$ de $\mathbb{R}^2$, où $\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Même question pour $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ donné dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à exprimer dans la base $(\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \overrightarrow{b}_3)$ donnée par $\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

On se donne une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

où $[x]_{\mathcal{B}}$ désigne le vecteur des coordonnées du vecteur x dans cette base. Trouver le vecteur $\overrightarrow{x}$ (c'est-à-dire ses coordonnées dans la base standard). Trouver les coordonnées $[y]_{\mathcal{B}}$ du vecteur

$$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Soit B une matrice sous forme échelonnée.

a) Montrer que les colonnes de B qui ont une position pivot (c.-à-d. les colonnes pivots) sont linéairement indépendantes.

b) Montrer que les colonnes de B qui n'ont pas de position pivot sont combinaison linéaire des colonnes pivots.

Exercice 4

Soit $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×2.

a) Montrer que les matrices A, B et C données par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes.

b) Trouver a, b, c, d tels que pour $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, les matrices A, B, C, D forment une base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Exercice 5

Soient $B = \{\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2\}$ et $C = \{\overrightarrow{c}_1, \overrightarrow{c}_2\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. On suppose $\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Donner la matrice de changement de base (matrice de passage) de la base C vers la base B :$P_{BC}[\overrightarrow{v}]_C = [\overrightarrow{v}]_B$.
b) Donner la matrice de changement de base (matrice de passage) de la base B vers la base C : $P_{CB}[\overrightarrow{v}]_B = [\overrightarrow{v}]_C$.
c) Si $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$ est tel que $[\overrightarrow{v}]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, calculer $[\overrightarrow{v}]_C$.
d) À présent, si $[\overrightarrow{v}]_C = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculer $[\overrightarrow{v}]_B$.

Exercice 6

Prouver le théorème suivant. *Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V. Alors toute famille d'éléments de V de plus de n éléments est une famille linéairement dépendante.*

Exercice 7

Soit $B = (1 - 3t^2, 2 + t - 5t^2, 1 + 2t)$.

a) Vérifier que B est une base de $\mathbb{P}_2$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
b) Déterminer la matrice de changement de bases (matrice de passage) de la base B vers la base canonique $E = \{t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2\}$: $P_{EB}[v]_B = [v]_E$.
c) Écrire $t \mapsto t^2$ comme combinaison linéaire des vecteurs de B.

Exercice 8

Soit W le sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ des matrices symétriques ($A = A^T$). On considère les matrices suivantes de W :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Utiliser la méthode de Gauss pour extraire de $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ une base de W.

Exercice 9

Soit $B = (1 + t^2, 1 - 3t^2, 1 + t - 3t^2)$ une base de $\mathbb{P}_2$. Soit $E = (1, t, t^2)$ la base canonique de $\mathbb{P}_2$.

1. Soit $q \in \mathbb{P}_2$ donné par

$$[q]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   Trouver $[q]_E$ en suivant les différentes méthodes vues en cours.

   a) En utilisant une multiplication matrice-vecteur : $P_{EB}[q]_B = [q]_E$.

b) Sans passer pas une matrice de changement de base, mais en utilisant la définition de $[\cdot]_B$.

c) Résoudre $P_{BE}[q]_E = [q]_B$.

2. Soit maintenant $q(t) = -2 + 5t - 2t^2$. Trouver $[q]_B$ en suivant les différentes méthodes vues en cours.

a) En utilisant une multiplication matrice-vecteur : $P_{BE}[q]_E = [q]_B$.

b) Sans passer pas une matrice de changement de base, mais en utilisant la définition de $[\cdot]_E$.

c) Résoudre $P_{EB}[q]_B = [q]_E$.

Exercice 10

a) Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^2$ donné par $W = \text{Span}\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ où $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Trouver un sous-ensemble B de $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ tel que B soit une base de W.

c) Agrandir l'ensemble $\{\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2\} \subset W$ pour obtenir une base de W.

Exercice 11

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le rang de A et la dimension du noyau de A.

b) Même question pour A^T.

c) On suppose qu'une matrice A de taille 7×7 possède un pivot dans chaque ligne. Quel est le rang de A ? Quelle est la dimension du noyau de A ?

d) On considère une matrice A de taille $m \times n$ et un vecteur $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$. Quelle doit être la relation entre le rang de $[\,A \;\; \overrightarrow{b}\,]$ et le rang de A pour que l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ soit compatible ?

Exercice 12

a) Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$ sont équivalentes (c'est-à-dire qu'on peut passer de A à B avec des opérations élémentaires sur les lignes).

b) Calculer $\text{rang}(A)$, $\dim(\text{Ker}A)$, $\text{rang}(B)$, $\dim(\text{Ker}B)$.

c) Trouver une base de $\text{Ker}A$ et $\text{Ker}B$.

<u>Exercices additionnels</u>

Exercice 13

Soit la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une base de Ker$C$.
2. On note par T la transformation linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par $T(\overrightarrow{x}) = C\overrightarrow{x}$. L'application T est-elle injective ? T est-elle surjective ? Justifier votre réponse.

Exercice 14

Soit h un nombre réel et D la matrice carrée $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & h \end{pmatrix}$. On définit une application T : $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ par $T(A) = D \cdot A$.

1. Déterminer si T est linéaire (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).
2. Déterminer si T est surjective (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).
3. Déterminer si T est injective (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).

Indication. Traiter le cas où D est inversible pour résoudre une équation de type $D \cdot A = B$.

Réponses de certains exercices:

Ex-2 $[\overrightarrow{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>**Exercices additionnels**</u>
