Série 8

Cette série suit le chapitre 4 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *espaces vectoriel, sous espace vectoriel, application linéaire, noyau, image, bases, coordonnées*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Soit $\mathbb{P} = \{p(t) = (a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots) \ : \ a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On définit sur cet ensemble les deux lois suivantes : la loi d'addition $p+q : (p+q)(t) = p(t) + q(t)$, $t \in \mathbb{R}$, et la loi de multiplication par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha p : (\alpha p)(t) = \alpha\, p(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $\mathbb{P}$ muni des deux lois définies plus haut est un espace vectoriel.

b) Montrer que l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_n = \{p(t) = (a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) \ : \ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ muni des deux mêmes lois est un espace vectoriel.

c) Montrer que l'ensemble des polynômes de degré 2

$$\{p(t) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) \ : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \ a_2 \neq 0\}$$

muni des deux mêmes lois ***n'est pas*** un espace vectoriel.

Soit $\mathbb{S} = \{y = (..., y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, ...) = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}} \ : \ \forall k \in \mathbb{Z}, y_k \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des suites réelles sur $\mathbb{Z}$. On définit sur cet ensemble les deux lois suivantes : la loi d'addition $w = y+z$: $w_k = y_k + z_k$, $k \in \mathbb{Z}$, et la loi de multiplication par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, $w = \alpha y$: $w_k = \alpha y_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Montrer que $\mathbb{S}$ muni des deux lois définies plus haut est un espace vectoriel.

Soit $\mathbb{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit sur cet ensemble les deux lois suivantes : la loi d'addition $f+g : (f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, et la loi de multiplication par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f : (\alpha f)(x) = \alpha\, f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

e) Montrer que $\mathbb{F}$ muni des deux lois définies plus haut est un espace vectoriel.

f) On munit $\mathbb{F}$ des deux lois définies plus haut. Montrer que $\mathbb{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$.

g) Montrer que l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $C(\mathbb{R})$, muni des deux mêmes lois, est un espace vectoriel.

h) On munit $C(\mathbb{R})$ de ces deux mêmes lois. Montrer que

$$C^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ est dérivable de dérivée continue}\}$$

est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$.

Exercice 2

On rappelle que $\mathbb{P}_3$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

a) Les vecteurs de $\mathbb{P}_3$ suivants sont-ils linéairement indépendants ?

(i) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 - t^2$, $p_2(t) = t^2$, $p_3(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$.

(ii) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 + t + t^2$, $p_2(t) = t + t^2$, $p_3(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Les vecteurs p_1, p_2, p_3 de (ii) forment-ils une base de $\mathbb{P}_3$?

Exercice 3

Soit $\mathbb{P}_2$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, dont on admet que c'est un espace vectoriel. On considère la transformation $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que T est linéaire.

b) Trouver une base de $\operatorname{Ker} T$.

c) Trouver une base de $\operatorname{Im} T$.

Exercice 4

Soit $\mathbb{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2. Parmi les quatre sous-ensembles de $\mathbb{P}_2$ ci-dessous, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{P}_2$

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_0 = a_2^2\} \\
E_2 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, p(0) = 1\} \\
E_3 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, p'(t) = 0\} \\
E_4 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_0 = a_1 = a_2\}
\end{aligned}$$

Exercice 5

On rappelle qu'une base d'un espace vectoriel est un système de génèrateurs linéairement indépendants. Vous pouvez ignorer la partie (c).

a) Prouver que les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Démontrer que l'ensemble $\mathcal{F} = \{1+t^2, t+t^2, 1+2t+t^2\}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré 2.

c) Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles. Montrer que les fonctions $\sin^2 t$ et $\cos^2 t$ sont linéairement indépendantes. Forment-elles une base de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

d) Soit $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×3. Montrer que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes. Comment faire pour compléter cette famille de quatre matrices en une base de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$?

Exercice 6

Soient V et W deux espaces vectoriels, T une transformation linéaire : $T : V \to W$ et $\{v_1, \ldots, v_p\}$ un sous-ensemble de V.

a) Montrer que si l'ensemble $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est linéairement dépendant alors l'ensemble $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ est linéairement dépendant.

b) Supposons que la transformation T est injective, c'est-à-dire que $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$. Montrer que si l'ensemble $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est linéairement indépendant alors l'ensemble $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ est linéairement indépendant.

Exercice 7

Soient

$$\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5/2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si $\overrightarrow{w}$ est dans ImA, dans Ker$A$ ou bien dans les deux.

Exercice 8

Soient $p_1(t) = 1-t$, $p_2(t) = t^3$, $p_3(t) = t^2 - t + 1$. Est-ce que le polyôme $q(t) = t^3 - 2t + 1$ est dans le span$\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$?

Exercice 9

Soit $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels.

1. Soit $V = \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid M \text{soit inversible}\}$. Alors
   - ☐ V est un sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}$
   - ☐ V est un espace vectoriel.
   - ☐ V n'est pas un espace vectoriel.
   - ☐ V est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices inversibles.

2. Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

☐ $[M]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

☐ $[M]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. Quelle famille ci-dessous est une base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Soient V un espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de V. Alors on a aussi que V est un sous-espace vectoriel de lui-même (ou d'un espace vectoriel plus grand) et H est un espace vectoriel.	☐	☐
b) Si H est un sous-ensemble d'un espace vectoriel V, alors il suffit que 0_V soit dans H pour que H soit un sous-espace vectoriel de V.	☐	☐
c) Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$.	☐	☐
d) Le noyau d'une matrice A n'est pas nécessairement un espace vectoriel.	☐	☐

Exercice 11

a) Soit a, b, c des nombres réels. On considère les quatre polynômes $p(t) = t^2 + t + 1$, $q(t) = t^2 + 2t + a$, $r(t) = t^3 + b$ et $s(t) = t + c$. Alors

☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ forme une base de $\mathbb{P}_4$ pour certaines valeurs des paramètres a, b, c ;

☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ forme une base de $\mathbb{P}_3$ pour certaines valeurs des paramètres a, b, c ;

☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ est toujours linéairement dépendante dans $\mathbb{P}_4$;

☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ est linéairement dépendante dans $\mathbb{P}_3$ lorsque $a - c - 1 \neq 0$.

b) Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Alors les matrices A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, sont linéairement indépendantes

☐ pour toutes valeurs de a, b.

☐ lorsque $a \neq 0$ et pour toutes valeurs de b.

☐ lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 3$.

☐ lorsque $a \neq 0$ et $b = 3$.

c) Dire lequel parmi les énoncés suivants est vrai.

☐ Soit f un vecteur de l'espace vectoriel V des fonctions réelles d'une variable réelle. S'il existe un réel t tel que $f(t) = 0$, alors f est le vecteur nul de V.

☐ Soit f un vecteur de l'espace vectoriel V des fonctions réelles d'une variable réelle. Si f est le vecteur nul de V, alors $f(t) = 0$ pour tout nombre réel t.

☐ Soit p un vecteur de l'espace vectoriel V des polynômes de degré $\leqslant 5$. Si $p(0) = 0$, alors p est le vecteur nul de V.

☐ Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ un vecteur de l'espace vectoriel V des suites réelles. S'il existe un entier n tel que $x_n = 0$, alors $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est le vecteur nul de V.

Exercice 12

a) Soit A et B deux matrices inversibles de taille 3×3. On forme la matrice C en multipliant la 3ème ligne de A par 5, puis la 2ème colonne de cette matrice par -3. On définit la matrice $D = C \cdot 2B$. Alors

☐ $\det D = 30 \det A \det B$;

☐ $\det D = -60 \det A \det B$;

☐ $\det D = 90 \det A \det B$;

☐ $\det D = -120 \det A \det B$.

b) Soit A et B deux matrices inversibles de taille 3×3. On obtient la matrice C à partir de A en multipliant par 4 la matrice A, puis en échangeant les lignes 1 et 2. On obtient la matrice D à partir de B en multipliant par 4 la deuxième colonne et en ajoutant 4 fois la première colonne à la troisième.

☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -4 \det A \cdot (\det B)^{-1}$;

☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -\det A \cdot (\det B)^{-1}$;

☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -16 \det A \cdot (\det B)^{-1}$;

☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -\frac{1}{4}\det A \cdot (\det B)^{-1}$.

Exercice 13

Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercices additionnels

Exercice 14

En calculant la forme échelonnée d'une matrice, montrer que le vecteur $\overrightarrow{v}$ est dans le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$:

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Exercice 15

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et de $\mathrm{Im}(A)$.

Exercice 16

Déterminer si les applications linéaires associées aux matrices suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réponses de certains exercices:

Ex-3 b) $\{t, t^2\}$ est une base possible

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base possible.

Ex-4 E_3 et E_4 sont des sous-EV.

Ex-13 $\det(A) = 16$

Exercices additionnels