Algèbre linéaire pour GM
O. Pouchon

Mardi 28 octobre 2025
EPFL

Série 7

Cette série suit les chapitres 3, 4 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *déterminant, espaces vectoriel, sous espace vectoriel*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Definition 0.1 On définit l'ensemble des matrices de tailles $m \times n$ à coefficients (composantes) dans $\mathbb{R}$ par $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Exercice 1

Montrez que les colonnes d'une matrice A inversible de taille $n \times n$.

a) engendrent $\mathbb{R}^n$;
b) sont linéairement indépendantes.

Exercice 2

Calculer les produits suivants en utilisant la multiplication par bloc :

a)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right)$$

b)

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

c)

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

Exercice 3

Soient A_{11} et A_{22} des matrices carrées.

a) On suppose que A_{11} est inversible. Déterminer X, Y et S satisfaisant

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

où le produit matriciel de droite est compatible avec la multiplication par bloc.

b) On suppose que A_{11} et A sont inversibles. Montrer que S est inversible.

Remarque : La matrice S est appelée le *complément de Schur*.

Exercice 4

a) On se donne

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de k a-t-on $AB = BA$?

b) Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et } T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $MN = MT$, bien que N soit différent de T.

Exercice 5

Soit $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'application définie par $T(A) = A + A^T$.

1. Déterminer si T est linéaire.
2. Déterminer si T est surjective.
3. Déterminer si T est injective.
4. Déterminer l'ensemble W des matrices qui vérifient $T(A) = 0$ et démontrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Exercice 6

1. Déterminer les matrices élémentaires 3×3 suivantes :
   - E_1, qui permute les deuxièmes et troisièmes lignes ;
   - E_2, qui multiplie la deuxième ligne par 8 ;
   - E_3, qui ajoute 7 fois la première ligne à la troisième.
2. Les matrices E_1, E_2 et E_3 sont elles inversibles ? Pourquoi ? Si oui, donner leur inverse et l'inverse du produit $E_1\, E_2\, E_3$.
3. Calculer le déterminant des matrices élémentaires suivantes.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A quelle opération élémentaire chacune de ces matrices se rapporte-t-elle ?

Exercice 7

Montrer qu'une matrice X (2×2) qui commute avec toutes les matrices A (2×2) est un multiple de l'identité, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X = \lambda I_n$.

Indication : Poser $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, puis utiliser quelques matrices A bien choisies.

Exercice 8

Calculer les déterminants des quatre matrices suivantes (en utilisant les propriétés du déterminant et sans faire trop de calculs !)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9

On considère des nombres $a, b, c \in \mathbb{R}$ et on construit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\det A = (b-a)(c-a)(c-b)$. Pour quelles valeurs de a, b, c la matrice A est-elle inversible ?

Indication. Effectuer des opérations sur les lignes de la matrice en utilisant L_2 pour modifier L_3, puis L_1 pour modifier L_2. La même astuce sera utile dans la suite de l'exercice !

Trouver une formule pour le déterminant de la matrice de la matrice 4×4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Si A et B sont deux matrices de taille 2×2 dont les colonnes sont désignées par $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ et $\vec{b}_1, \vec{b}_2$, alors $AB = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 \end{pmatrix}$.	☐	☐
b) Soient A, B et C trois matrices de taille 3×3. Alors $AB + AC = (B + C)A$.	☐	☐
c) Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$. Alors $A^T + B^T = (A + B)^T$.	☐	☐

d) La transposée d'un produit de matrices est égale au produit de leurs transposées dans le même ordre. ☐ ☐

Exercice 11

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Soient A, B et C trois matrices. Alors $(AB)C = (AC)B$. ☐ ☐
b) Si A est une matrice inversible, alors A^{-1} l'est aussi. ☐ ☐
c) Le produit de plusieurs matrices inversibles de taille $n \times n$ n'est pas inversible. ☐ ☐
d) Si A est une matrice inversible de taille $n \times n$, alors l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ est compatible quel que soit $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$. ☐ ☐

Exercice 12

a) Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

b) Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a+b & c \\ a & b & a \end{vmatrix}.$$

c) Calculer le déterminant de la matrice suivante. Comment le déterminant dépend t-il de l'angle φ ? Pourquoi ?

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

d) Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 18 & 17 & 23 \\ 49 & 1 & 72 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 18 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(AB)$.

Exercice 13

Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercices additionnels

Exercice 14

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Un système d'équations linéaires avec trois équations à 5 inconnues admet au moins une solution. ☐ ☐

b) Un système d'équations linéaires avec cinq équations à 3 inconnues n'admet aucune solution. ☐ ☐

c) L'équation $\sqrt{2}x + \pi y - z = 1$ est une équation linéaire à trois inconnues. ☐ ☐

d) L'équation $2\sqrt{x} + \pi y - z = 1$ est une équation linéaire à trois inconnues. ☐ ☐

e) L'équation $\cos x = 0$ est une équation linéaire à une inconnue. ☐ ☐

f) L'équation $x = 1$ est une équation linéaire à une inconnue, les équations $y = -1$ et $z = 5$ également, mais le système d'équations

$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= -1 \\ z &= 5 \end{cases}$$

est un système linéaire de trois équations à trois inconnues. ☐ ☐

Exercice 15

Soit R la matrice échelonnée-réduite associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nous avons

☐ $r_{14} = 6$ ☐ $r_{14} = 5$ ☐ $r_{14} = 3$ ☐ $r_{14} = 2$

Exercice 16

Considérer les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} h+7 \\ 8 \\ 2h+1 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\vec{v}_3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ lorsque

☐ $h = 2$ ☐ $h = 4$ ☐ $h = 1$ ☐ $h = -2$

Réponses de certains exercices:

Ex-2 $\left(\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 5 & 4 \\ \hline 1 & 2 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{cc} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{array}\right)$, et $\left(\begin{array}{c|c} 3 & 6 \\ \hline 4 & 8 \end{array}\right)$

Ex-12

a) 11

b) 0, a^3

c) 1

d) 0

Ex-13 $\det(A) = 16$

<u>Exercices additionnels</u>
