

Série 6

Cette série suit le chapitre 2 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *matrice, déterminant, inverse*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

- a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Est-ce que $AB = BA$?
- b) Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

- a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Trouver (si elle existe) une matrice B de taille 2×2 non nulle telle que $AB = 0$. (*Idée : écrire AB sous la forme $(A \vec{b}_1 \quad A \vec{b}_2)$*)
- b) Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
- c) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{R}$ a-t-on $AB = BA$?
- d) Trouver une matrice A non nulle telle que $A^2 = 0$.

Exercice 3

Calculer les produits matriciels suivants, et indiquer les compositions correspondantes de transformations linéaires, avec les dimensions des espaces, $T_{AB} : \mathbb{R}^{\dots} \xrightarrow{T\dots} \mathbb{R}^{\dots} \xrightarrow{T\dots} \mathbb{R}^{\dots}$.

- a) AB , où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

b) ABC , où $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) ABC , où $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

a) Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(i) en utilisant la formule générale de l'inverse d'une matrice 2×2 ;

(ii) en mettant la matrice $(A \ I_2)$ sous forme échelonnée réduite.

b) Calculer l'inverse de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ en mettant la matrice $(B \ I_3)$

sous forme échelonnée réduite.

Exercice 5

Démontrer ce théorème.

Soit A une matrice $n \times n$. Alors s'il existe une matrice C de taille $n \times n$ telle que $AC = I_n$ ou $CA = I_n$ alors A est inversible d'inverse C .

Exercice 6

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles (essayer d'utiliser le moins de calculs possible, justifier votre réponse).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 7 & 14 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7

On considère les matrices élémentaires de taille 4×4 .

a) Donner la matrice élémentaire qui permet de permuter les lignes 2 et 4.

b) Donner la matrice élémentaire qui ajoute cinq fois la ligne 1 à la ligne 3.

- c) Donner la matrice élémentaire qui multiplie la ligne 3 par 17.
- d) Donner les inverses des matrices trouvées aux questions a), b) et c).

Exercice 8

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et soit l'application linéaire $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ donnée par $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$. Montrer

- a) T_A est injective $\Leftrightarrow A$ a une position pivot dans chaque colonne.
- b) T_A est surjective $\Leftrightarrow A$ a une position pivot dans chaque ligne.

Préciser dans chaque cas quelle est la condition nécessaire entre m et n .

Exercice 9

Ceci est un autre exercice de base concernant les produits matriciels, pour nous assurer que la différence entre $\vec{u}^T \vec{v}$ et $\vec{u} \vec{v}^T$ est bien claire.

On peut considérer tout vecteur de \mathbb{R}^n comme une matrice de dimension $n \times 1$. Soient les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathbb{R}^3 :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On appelle $\vec{u}^T \vec{v}$ produit scalaire (ou produit intérieur) des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

- a) Ecrire \vec{u}^T et \vec{v}^T .
- b) Quelle est la taille des deux matrices produits $\vec{u}^T \vec{v}$ et $\vec{v}^T \vec{u}$?
- c) Ces deux produits sont-ils égaux ? Pourquoi ?

Le produit $\vec{u} \vec{v}^T$ est appelé produit extérieur.

- d) Quelle est la taille des deux matrices produits $\vec{u} \vec{v}^T$ et $\vec{v} \vec{u}^T$?
- e) Ces deux produits sont-ils égaux ? Pourquoi ?

Exercice 10

Soit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer C^2 et montrer que C^3 est la matrice nulle. On dit que C est *nilpotente*.
2. Montrer sans faire de calculs explicites que $I_3 + C + C^2$ est l'inverse de la matrice $(I_3 - C)$.
3. Trouver l'inverse (explicite cette fois !) de la matrice $I - C$.

4. Soit $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Trouver les solutions de l'équation $\vec{x} = C\vec{x} + \vec{b}$ en échelonnant la matrice augmentée $(I - C \mid \vec{b})$.
5. Résoudre la même équation que ci-dessus en utilisant la formule $\vec{x} = (I - C)^{-1}\vec{b}$.

Exercice 11

Déterminer l'ensemble des valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ pour les quelles les matrices suivantes sont inversibles. Ensuite, donner l'inverse de la matrice considérée pour ces valeurs de λ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & \lambda \\ 3 & 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 12

a) Les matrices sont de taille $n \times n$.

- Soient A, B deux matrices telles que A ou B n'est pas inversible. Alors AB n'est pas inversible.
- Il existe une matrice A inversible et une matrice B qui ne l'est pas telles que AB est inversible.
- Soient A, B deux matrices inversibles, alors $A + B$ est inversible.
- Soient A, B deux matrices inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

b) Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$.

- Alors $(AB)^T = A^T B^T$.
- Alors $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ si A est inversible.
- Si $m = n$ et $A = A^T$, alors A est diagonale.
- Si $m = n = p$, $A = A^T$ et $B = B^T$, alors $(AB)^T = AB$.

- c)
- Une matrice C de taille 2×2 vérifie $AC = CA$ pour toute matrice A de taille 2×2 si et seulement C est diagonale.
 - Une matrice C de taille 2×2 vérifie $AC = CA$ pour toute matrice A de taille 2×2 si et seulement C est scalaire, i.e. $C = \lambda I$, où I est la matrice identité et $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Soient A, C deux matrices 2×2 telles que $AC = CA$. Alors A est diagonale ou C est diagonale.
 - Soient A, C deux matrices 2×2 telles que $AC = CA$. Alors A est scalaire ou C est scalaire.

d) Soit A une matrice de taille 7×8 et T l'application linéaire définie par $T\vec{x} = A \cdot \vec{x}$.
Alors \vec{x} est un vecteur de

- \mathbb{R}^7
- \mathbb{R}^8
- \mathbb{R}^{15}
- \mathbb{R}^{56}

e) Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$.

- Alors BA est une matrice $n \times n$.
- Alors A^T est une matrice $m \times n$.
- Alors A représente une application linéaire $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- Alors $(AB)^T$ est une matrice $p \times m$.

f) Soient A, B, C trois matrices $n \times n$.

- Si $AC = BC$, alors $A = B$.
- Si A est inversible et $AC = BC$, alors $A = B$.
- Si $C = C^{-1}$ et $AC = BC$, alors $A = B$.
- Si $C = C^T$ et $AC = BC$, alors $A = B$.

g) Soit A une matrice carrée et a un nombre réel. Alors

- $A + I$ est inversible.
- $(A - I)(A + I) = A^2 - I$.
- $(A + I)(A + I) = A^2 + I$.
- $(aA)^2 = a(A^2)$.

Exercices additionnels

Exercice 13

Soit $a \in \mathbb{R}$. A l'aide de l'algorithme de réduction (ou de Gauss-Jordan), déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles le système

$$\begin{cases} ax + (1 - a)y + (1 - a)z = a^2 \\ ax + (1 + a)y + (1 + a)z = a - a^2 \\ x + y + z = 1 - a \end{cases}$$

- a) n'admet aucune solution,
- b) admet une infinité de solutions,
- c) admet une solution unique.

Ensuite résoudre le système dans les cas b) et c).

Exercice 14

Déterminer toutes les matrices échelonnées-réduites de taille 3×3 .

Réponses de certains exercices:

Ex-2

- a) On peut proposer $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- b) Il n'y en a pas
- c) $k = 9$
- d) Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex-6 B, C, D

Ex-11 $\lambda \neq 0$ pour la matrice A et $\lambda \neq \frac{1}{2}$ pour la matrice B .

Exercices additionnels

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, Orane Pouchon, Jérôme Scherer, ...). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.