Série 5

Cette série suit les chapitres 1 et 2 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *injective, surjective, bijective, matrice canoniquement associée, calcul matriciel*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants si

☐ $b = 1$ ☐ $b = 2$ ☐ $b = 3$ ☐ $b = 4$

Exercice 2

Trouver les matrices correspondant aux transformations linéaires suivantes (exprimées dans la base canonique) :

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Exercice 3

Dans les cas suivants, écrire la matrice canonique correspondant à la transformation, et déterminer si la transformation est injective, surjective ou bijective.

a) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1+3x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

b) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1+x_2+x_3$

c) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

d) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix}$

e) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1-x_2 \end{pmatrix}$

f) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2+x_2^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

Exercice 4

Soit $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ une transformation linéaire. Montrer qu'une condition nécessaire pour que T soit bijective est $n=m$.

Exercice 5

a) Déterminer si les transformations linéaires suivantes sont injectives ou surjectives :

   (a) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4, T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (b) $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4, T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_2+x_3 \\ x_3+x_4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (c) La rotation dans $\mathbb{R}^3$ d'axe Oz et d'angle 60^o (dans le sens trigonométrique).

b) Soit $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ une application linéaire. Démontrer que si T est surjective alors elle est aussi injective.

Exercice 6

Déterminer lesquelles des applications suivantes sont linéaires et donner la matrice associée lorsque cela est possible :

a) $\begin{aligned} T:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin x \end{aligned}$

b) $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\quad x \longmapsto (x, x^2)$

c) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\quad (x, y) \longmapsto (x + y\ ,\ 2x - 3y)$

d) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\quad (x, y, z) \longmapsto (2x - z\ ,\ x + y)$

e) $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\quad (x, y, z, u) \longmapsto (2x + u\ ,\ y - z + 1)$

Exercice 7

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire et A la matrice canoniquement associée.

Prouver les affirmations suivantes

a) *T est surjective si et seulement si les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$;*

b) *T est injective si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.*

Exercice 8

Calculer la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 3y + 5z + 7u \\ -x + 3y \\ x + 2y + 3z + 7u \end{pmatrix}$$

et déterminer si l'application est injective, surjective ou bijective.

Exercice 9

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Si une matrice A est de taille $m \times n$ alors l'image de la transformation $\overrightarrow{x} \mapsto A\overrightarrow{x}$ est contenue dans $\mathbb{R}^n$.	☐	☐
b) Chaque transformation linéaire est une transformation matricielle.	☐	☐
c) La transformation $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = mx^2 + b$ est linéaire pour $b = 0$.	☐	☐
d) Une transformation linéaire préserve les opérations d'addition vectorielle et de multiplication par un scalaire.	☐	☐
e) Chaque transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ est une transformation linéaire.	☐	☐

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Si la matrice échelonnée-réduite associée à un système d'équations linéaires homogènes à m équations et n inconnues possède r pivots, alors le système a $n-r$ variables libres. ☐ ☐

b) Si un système d'équations linéaires homogènes possède plus d'inconnues que d'équations, alors il a une infinité de solutions. ☐ ☐

c) Si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$, alors $\overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. ☐ ☐

d) Si le vecteur $\overrightarrow{v}_4$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$ et $\overrightarrow{v}_3$, alors le vecteur $\overrightarrow{v}_1$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v}_2$, $\overrightarrow{v}_3$ et $\overrightarrow{v}_4$. ☐ ☐

Exercice 11

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits suivants (s'ils existent). Si les produits n'existent pas, expliquer pourquoi.

a) AB, BA, AC, CA, BC, CB, CD, EC, EA

b) AA^T, A^TA, BA^T, BC^T, C^TA, BD^T, D^TB

<u>**Exercices additionnels**</u>

Exercice 12

Laquelle des colonnes de la matrice suivante n'est pas une colonne-pivot ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

☐ la première,

☐ la deuxième,

☐ la troisième,

☐ la quatrième.

Exercice 13

a) Pour quelle valeur de h la matrice suivante est-elle la matrices augmentée d'un système linéaire compatible (consistant) :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{array} \right)$$

- ☐ $h = 5$,
- ☐ $h = 5/2$,
- ☐ $h \neq 5/2$,
- ☐ $h = -5/2$.

b) Même question pour la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{array}\right).$$

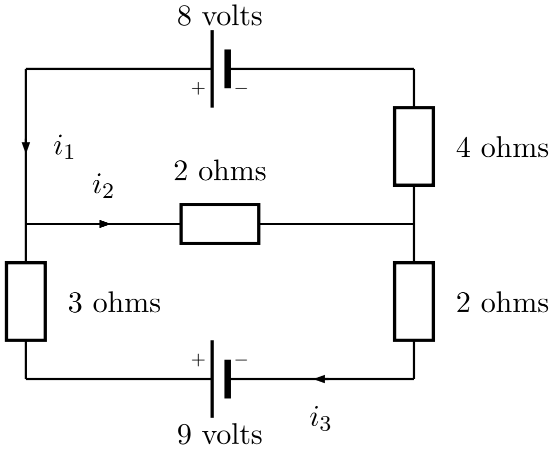
- ☐ $h = 2$,
- ☐ $h = -2$,
- ☐ $h \neq 2$,
- ☐ $h \neq -2$.

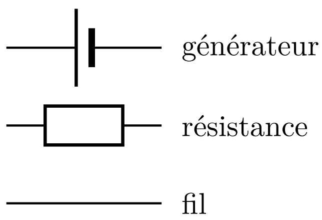
Exercice 14

Les deux lois de Kirchhoff

1. À chaque nœud (embranchement) d'un circuit électrique, la somme des courants (intensités) qui entrent dans le nœud est égale à la somme des courants qui en sortent.
2. La somme des tensions (différences de potentiels) le long de tout circuit fermé est nulle (l'augmentation du potentiel est comptée avec $+$ et la diminution avec $-$).

On rappelle que la chute de potentiel U dans une résistance R traversée par un courant d'intensité I est donnée par la loi d'Ohm $U = RI$.
Déterminer les intensités i_1, i_2, i_3 dans le circuit suivant.





Réponses de certains exercices:

Ex-3

a) injective, non surjective. Donc non bijective.
b) surjective , non injective. Donc non bijective.
c) bijective
d) rien
e) injective, surjective et bijective.
f) T n'est pas une transformation linéaire, il est impossible de la représenter canoniquement par une matrice.

Ex-5

(a) injective mais pas surjective ;
(b) ni injective, ni surjective.
(c) injective et surjective

<u>Exercices additionnels</u>