Série 4

Cette série suit le chapitre 1 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *base, transformation linéaire, indépendance linéaire*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Le système d'équations linéaires homogène représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est compatible. ☐ ☐

b) Le système d'équations linéaires inhomogène représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est compatible. ☐ ☐

c) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible. ☐ ☐

d) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible. ☐ ☐

e) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible. ☐ ☐

f) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible. ☐ ☐

Exercice 2

a) Déterminer si les vecteurs $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 2)$, $(0, 1, 1, 2)$ et $(0, 0, 1, 2)$ sont linéairement indépendants.

b) Déterminer si les vecteurs $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 2)$, $(0, 1, 1, 2)$ et $(0, 0, 1, 2)$ engendrent $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3

Prouver l'affirmation suivante :

Soit l'ensemble $\{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\}$ *de vecteurs de* $\mathbb{R}^n$. *Si* $p < n$ *alors l'ensemble ne peut pas être une base de* $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4

Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ? Engendrent-ils $\mathbb{R}^3$ (questions a) et b)) ou $\mathbb{R}^2$ (question c)) ?

a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Décrire quelle est la forme échelonnée réduite dans les cas suivants :

a) A est une matrice 3×3 avec des colonnes linéairement indépendantes.

b) A est une matrice 4×2, $A = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2)$ et $\vec{a}_2$ n'est pas un multiple de $\vec{a}_1$.

c) A est une matrice $4{\times}3$, $A = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3)$. Les vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont linéairement indépendants, et $\vec{a}_3$ n'est pas une combinaison linéaire de $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$.

Exercice 6

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Montrer que les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$ *si et seulement si* la forme échelonnée de la matrice A a une position pivot dans chaque ligne.

Exercice 7

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils se trouvent sur une même droite qui passe par l'origine.	☐	☐
b) Si un ensemble comporte moins de vecteurs que le nombre de composantes de ceux-ci, alors il est linéairement indépendant.	☐	☐
c) Une équation homogène est toujours compatible.	☐	☐
d) Si $\vec{x}$ est une solution non triviale de $A\vec{x} = \vec{0}$, alors aucune composante de $\vec{x}$ est nulle.	☐	☐

Exercice 8

Soit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ h \end{pmatrix}$$

- ☐ L'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est linéairement indépendant pour $h = -2$.
- ☐ Le vecteur $\mathbf{v}_2$ dépend linéairement des vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_3$ pour $h \neq 2$.
- ☐ L'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est linéairement indépendant pour $h \neq -2$.
- ☐ Le vecteur $\mathbf{v}_3$ dépend linéairement des vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ pour $h = 2$.

Exercice 9

a. Combien de colonnes pivots une matrice 7×5 doit-elle posséder pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes ?

☐ Moins de 5, ☐ 5 exactement, ☐ 7 exactement, ☐ entre 5 et 7.

b. Combien de colonnes pivots une matrice 5×7 doit-elle posséder pour que ses colonnes engendrent $\mathbb{R}^5$?

☐ Moins de 5, ☐ 5 exactement, ☐ 7 exactement, ☐ entre 5 et 7.

c. L'application linéaire du plan $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ est

☐ une rotation ☐ une translation ☐ une projection orthogonale ☐ une homothétie

Exercice 10

Décrire géométriquement la transformation linéaire suivante : $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$T(\vec{u}) = A\vec{u} \qquad \text{où } A = \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}.$$

Indication : Calculer les images de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par T.

<u>Exercices additionnels</u>

Exercice 11

Déterminer toutes les valeurs possibles des nombres a, b, c, d et e pour lesquelles la matrice suivante est sous forme échelonnée-réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & c & 1 & d & 3 \\ 0 & e & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 12

Déterminer les valeurs des paramètres réels a, b et c pour lesquelles le système d'équations

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + u = a \\ x + 3y - 2z + u = b \\ x - 7y + 8z + u = c \end{cases}$$

possède des solutions. Déterminer ces solutions.

Indication : résoudre le système $A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{b}$ *avec* $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Réponses de certains exercices:

Ex-2

1. oui
2. oui

<u>Exercices additionnels</u>

Ex-12

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(3a+2b) \\ \frac{1}{5}(b-a) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{pour tout } s, t \in \mathbb{R}.$$
