Série 3

Cette série suit le chapitre 1 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *Gauss-Jordan, formes E et ER, combinaisons linéaires, span,* $\mathbb{R}^n$*, (in)dépendance linéaire*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de α le vecteur $\overrightarrow{b}$ est-il une combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}_1$ et $\overrightarrow{a}_2$?

Exercice 2

Considérons le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 8x_3 & = & 7 \\ -3x_1 & - & 7x_2 & + & 9x_3 & = & -6. \end{array}\right.$$

a) Écrire le système sous forme matricielle $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

b) Écrire le système comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A.

c) Trouver la solution de l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

d) Subsidiaire : écrire l'ensemble des solutions en fonction d'un paramètre.

Exercice 3

Calculer $A(\alpha_1\overrightarrow{v}_1 + \alpha_2\overrightarrow{v}_2)$, où

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3;$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1.$$

Exercice 4

Écrire les solutions des systèmes $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ suivants sous la forme $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{p} + \overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{p}$ est une solution particulière du système, et $\overrightarrow{v}$ est la solution générale du système homogène $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 14 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 19 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

Exercice 5

a) Soient les vecteurs

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}.$$

i) Pour quelle(s) valeur(s) de h le vecteur $\overrightarrow{w}$ peut-il être obtenu comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$?

ii) Dans ce cas quels sont les coefficients respectifs a_1, a_2 des vecteurs $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$?

b) Le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$, se trouve-t-il dans le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les colonnes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$

Justifiez votre réponse.

Exercice 6

Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Montrer que l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ n'est pas compatible pour tout vecteur $\overrightarrow{b}$ de $\mathbb{R}^2$. Trouver et décrire l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{b}$ pour lesquels $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ est compatible.

Exercice 7

Pour les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donner cinq vecteurs qui appartiennent à $\text{span}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$. Pour chaque vecteur, donner les coefficients de la combinaison linéaire.

Exercice 8

Soient $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Donner une interprétation géométrique de $\text{span}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$.

b) Est-ce que $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est dans le $\text{span}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$?

Exercice 9

Soit $\text{span}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\}$ avec

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Laquelles des informations suivantes est correcte ?

- ☐ Le span ne contient aucun vecteur de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ Le span contient tous les vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ Le vecteur $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est dans le span.
- ☐ Le span contient une infinité de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 10

Soit $\text{span}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ avec

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Laquelles des informations suivantes est correcte ?

- ☐ $\text{span}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\} = \mathbb{R}^3$.

☐ Le span$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ est une droite.
☐ Le span$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ est un plan.
☐ Le span$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ ne contient que $\overrightarrow{0}$.

Exercice 11

Donner une matrice A de taille 3×3 à coefficients non-nuls (tous !) et un vecteur $\overrightarrow{b}$ de $\mathbb{R}^3$, tels que $\overrightarrow{b}$ n'appartienne pas à span$\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}\}$ où $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ sont les colonnes de A.

Exercices additionnels

Exercice 12

Pour chacun des systèmes suivants :

i) Écrire la matrice augmentée.
ii) Transformer la matrice augmentée sous forme échelonnée réduite.
iii) Identifier les variables de bases et les variables libres, et écrire la solution générale.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 8 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & = & 6 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrrrcr} x_1 & + & 2x_2 & & & = & 1 \\ & & & x_3 & & = & 2 \\ & & & & x_4 & = & -1 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \end{array}\right.$

Exercice 13

Déterminer les valeurs du nombre réel a pour lesquelles le système d'équations linéaires

$$\left\{\begin{array}{r} x + y + 2z = 2 \\ y + az = 2 \\ (a^2 - 4)z = a - 2 \end{array}\right.$$

possède des solutions. Déterminer ces solutions.

Réponses de certains exercices:

Ex-1 $\alpha = -\frac{7}{2}$

Ex-3

a) $A(\alpha_1 \overrightarrow{v}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{v}_2) = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix}.$

b) $A(\alpha_1 \overrightarrow{v}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{v}_2) = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Ex-4

1.
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. incompatible

Ex-5 $h = -9$

<u>Exercices additionnels</u>