Algèbre linéaire pour GM — Mardi 16 septembre 2025
O. Pouchon — EPFL

# Série 2

Cette série suit le chapitre 1 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *solutions, Gauss-Jordan, formes échelonnées, formes échelonnées-réduites*

**Remarques :**

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

---

## Exercice 1

i) Écrire les matrices augmentées correspondant aux systèmes linéaires suivants.

ii) Résoudre ces systèmes linéaires en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes de ces matrices augmentées.

a) $$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 3 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 12 \\ x_3 & + & 2x_1 & - & 4x_2 & = & -1 \\ x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_1 & = & -8 \end{array}\right.$$

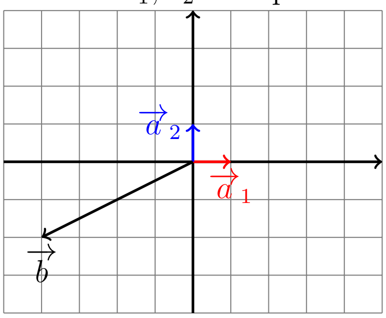
c) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -4 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \end{array}\right.$$

d) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & & & = & 5 \\ 5x_3 & - & x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

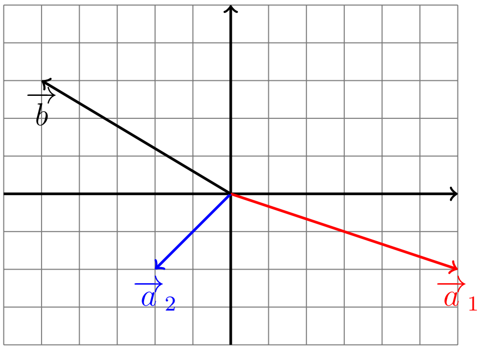
## Exercice 2

À l'aide des graphes ci-dessous, trouver les coefficients des combinaisons linéaires demandées. Il se peut qu'il existe plusieurs solutions, ou aucune solution. Dans les graphes ci-dessous, un carré =1 unité.

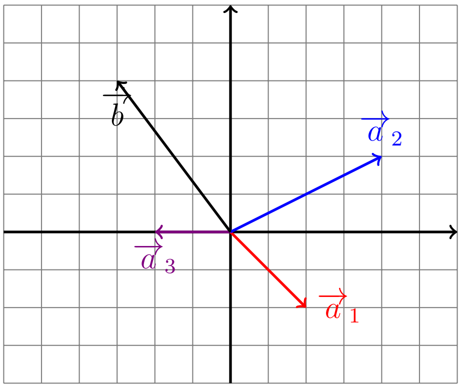
a) Trouver $\lambda_1, \lambda_2$ tels que $\overrightarrow{b} = \lambda_1 \overrightarrow{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{a}_2$



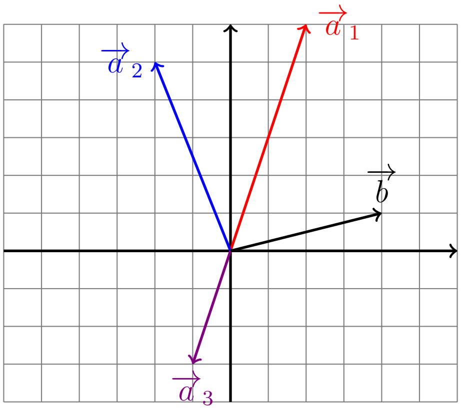
b) Trouver $\lambda_1, \lambda_2$ tels que $\overrightarrow{b} = \lambda_1 \overrightarrow{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{a}_2$




c) Trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\overrightarrow{b} = \lambda_1 \overrightarrow{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{a}_2 + \lambda_3 \overrightarrow{a}_3$




d) Trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\overrightarrow{b} = \lambda_1 \overrightarrow{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{a}_2 + \lambda_3 \overrightarrow{a}_3$. Peut-on trouver $\mu_1$ et $\mu_3$ tels que $\overrightarrow{b} = \mu_1 \overrightarrow{a}_1 + \mu_3 \overrightarrow{a}_3$ ?




**Exercice 3**

a) Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée puis sous forme échelonnée réduite.

b) Supposons que ces matrices sont des matrices augmentées de systèmes linéaires. Déterminer dans chaque cas si le système linéaire possède exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

## Exercice 4

a) Vérifier si les matrices suivantes sont sous forme échelonnée ou sous forme échelonnée réduite.

b) Identifier les variables de bases (ou principales) et les variables libres.

c) Déterminer si les systèmes linéaires correspondant possèdent exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Exercice 5

Déterminer si les systèmes linéaires homogènes suivants ont une solution non triviale.

a) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 5x_2 & + & 8x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 7x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 9x_3 & = & 0 \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -7x_1 & + & 37x_2 & + & 119x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 19x_2 & + & 57x_3 & = & 0 \end{array} \right.$

## Exercice 6

A l'aide de l'algorithme d'élimination de Gauss, résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rl} w + 2x - y & = 4 \\ -y + x & = 3 \\ w + 3x - 2y & = 7 \\ 2u + 4v + w + 7x & = 7 \end{array} \right.$$

## Exercice 7

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Est-il possible d'écrire $\overrightarrow{b}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}_1$ et $\overrightarrow{a}_2$ ?

b) Donner une interprétation géométrique du résultat.

**Exercice 8**

Le système linéaire suivant où $a$ est un paramètre réel

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z &= 1 \\ 2y + 2z &= 1 - 2a \\ 2x + 4ay + 2z &= 1 \\ 4x + 4ay + 2z &= 1 + 2a \end{cases}$$

☐ possède une solution unique lorsque $a = 1/2$

☐ ne possède aucune solution lorsque $a \neq 1/2$

☐ possède une infinité de solutions lorsque $a = 1/2$

☐ ne possède aucune solution lorsque $a = 1/2$

**Exercice 9**

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

| | V | F |
|---|---|---|
| a) Des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice augmentée ne changent jamais l'ensemble des solutions du système linéaire associé. | ☐ | ☐ |
| b) Un système incompatible a plus d'une solution. | ☐ | ☐ |

**Exercice 10**

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

| | V | F |
|---|---|---|
| a) En appliquant différentes opérations (licites) sur les lignes d'une matrice, on obtient des formes échelonnées réduites différentes. | ☐ | ☐ |
| b) Une variable de base d'un système linéaire est une variable qui correspond à un pivot dans une colonne. | ☐ | ☐ |
| c) La dernière colonne d'une matrice augmentée peut faire office de colonne pivot. | ☐ | ☐ |
| d) Un système n'est compatible que lorsque chaque colonne contient un pivot. | ☐ | ☐ |

**Exercice 11**

Montrer que les opérations élémentaires sur les lignes (à savoir, l'ajout d'une ligne à une autre, l'échange de deux lignes, et la multiplication d'une ligne par un réel non nul) transforment un système linéaire en un système équivalent.

**Exercice 12**

Montrer que le système d'équations linéaires suivant n'a pas de solution :

$$\begin{cases} 2x + \ \ y + \ \ z \qquad = 1 \\ \ \ x - 2y - \ \ z - \ \ u = 3 \\ \ \ x + 3y + 2z + \ \ u = 5 \\ 3x + 4y + 3z + 3u = 7 \end{cases}$$

---

**Réponses de certains exercices:**

**Ex-1**

a) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$

b) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$

c) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$

d) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$

**Ex-2**

a) $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -2$

b) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1/2$

c) infinité de solutions.

d) infinité de solutions. Non on ne peut pas trouver de $\mu_1$ et $\mu_3$ tels que $\overrightarrow{b}$ soit une comb. linéaire de $\overrightarrow{a}_1$ et $\overrightarrow{a}_3$, car ces ils sont colinéaires.

**Ex-6** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

---