Série 1

Cette série suit le chapitre 1.1 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *équation linéaire, systèmes d'équations linéaires, solutions*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Parmi les équations suivantes, déterminer celles qui sont linéaires.

a) $x_1^2 + x_2^2 = 1$
b) $2^2 x_1 + 2^2 x_2 = 1$
c) $\sqrt{3}x_1 + \left(1 - \sqrt{2}\right) x_2 + 3 = \pi x_1$
d) $3x_1 + 2x_2 + 4\,x_3\,x_4 = 5$
e) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) x_1 - 2 = 2x_1 + 4x_2 + \sqrt{3}\,x_3 + x_9$

Exercice 2

Soient les deux droites d'équations respectives $\dfrac{1}{2}x_1 - 3x_2 = 6$ et $x_1 + 2x_2 = 4$. Représenter graphiquement les deux équations dans un systèmes d'axes x_1 et x_2 et déterminer le point d'intersection de ces deux droites

Exercice 3

a) Soient les trois droites $x_1 - 4x_2 = 1$, $2x_1 - x_2 = -3$ et $-x_1 - 3x_2 = 4$. Représenter les droites dans le plan $\mathbb{R}^2$. Ont-elles des points communs ?
b) Soient les trois plans $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$, $x_2 - x_3 = 1$ et $x_1 + 3x_2 = 0$. Est-ce qu'ils ont des points communs ?

Exercice 4

Considérons l'équation suivante

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = 1.$$

a) Dessiner la solution avec les paramètres $\alpha = 1$, $\beta = 3$.

b) Pour quelles valeurs de α, β la droite $\alpha x_1 + \beta x_2 = 1$ est-elle parallèle à la droite $-x_1 + x_2 = -1$?

c) Trouver les valeurs de α, β (si elles existent) telles que le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & x_2 & = & -1 \\ \alpha x_1 & + & \beta x_2 & = & 1 \\ (\alpha-1)\,x_1 & + & (\beta+1)\,x_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

i) possède une infinité de solutions ;

ii) ne possède aucune solution ;

iii) possède une solution unique.

Exercice 5

Remplisser les informations manquantes pour chaque système ci-dessous.

a) $m =$ ___ équations et $n =$ ___ variables

$$\begin{cases} 3x_1 + \quad 4x_3 & = 5 \\ \quad x_2 & = 2 \end{cases} \quad \text{avec coefficients} \quad \begin{array}{lll} a_{11} = \_\_\_, & a_{12} = \_\_\_, & a_{13} = \_\_\_ \\ a_{21} = \_\_\_, & a_{22} = \_\_\_, & a_{23} = \_\_\_ \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} b_1 = \_\_\_ \\ b_2 = \_\_\_ \end{array}$$

Vérifier que $(-2, 2, \frac{11}{4})$ est une solution du système linéaire. Est- ce que $(-2, 1, \frac{11}{4})$ est une solution du système linéaire ?

b) $m =$ ___ équations et $n =$ ___ variables

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 & = -\frac{1}{2} \\ 2x_1 - x_2 & = -5 \end{cases} \quad \text{avec coefficients} \quad \begin{array}{ll} a_{11} = \_\_\_, & a_{12} = \_\_\_ \\ a_{21} = \_\_\_, & a_{22} = \_\_\_ \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} b_1 = \_\_\_ \\ b_2 = \_\_\_ \end{array}$$

Donner la/les solution(s) du système si elles existent.

c) $m =$ ___ équations et $n =$ ___ variables

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 & = 0 \\ x_1 + x_2 & = 3 \end{cases} \quad \text{avec coefficients} \quad \begin{array}{ll} a_{11} = \_\_\_, & a_{12} = \_\_\_ \\ a_{21} = \_\_\_, & a_{22} = \_\_\_ \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} b_1 = \_\_\_ \\ b_2 = \_\_\_ \end{array}$$

Vérifier que $(2, 1)$ est une solution du système linéaire. Donner la/les solution(s) du système s'il y'en a d'autres.

d) $m =$ ___ équations et $n =$ ___ variables

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 & = 1 \\ x_1 + \frac{1}{3}x_2 & = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{avec coefficients} \quad \begin{array}{ll} a_{11} = \_\_\_, & a_{12} = \_\_\_ \\ a_{21} = \_\_\_, & a_{22} = \_\_\_ \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} b_1 = \_\_\_ \\ b_2 = \_\_\_ \end{array}$$

Donner la/les solution(s) du système si elles existent.

Exercice 6

On considère l'équation $ax + by = 2$.

a) Représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ les solutions lorsque $a = 2$ et $b = -1$.

b) Même question pour $a = 1$ et $b = 2$.

c) Estimer géométriquement la solution du système

$$\begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

sur l'illustration des points a) et b), puis résoudre le système.

Exercice 7

Considérons le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - 5x_2 & = & 0 \\ -x_1 - 2x_2 & = & 0 \\ 3x_1 - 3x_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

a) Est-ce que le système est compatible ?

b) Donner un'interprétation géométrique du résultat.

Exercice 8

Trouver le polynôme de degré 2 de la forme $f(t) = at^2 + bt + c$ dont le graphe passe par les points $(1, -1)$, $(2, 3)$ et $(3, 13)$. Esquisser le graphe de ce polynôme.

Exercice 9

Déterminer les matrices associées aux applications linéaires suivantes et calculer ensuite l'image d'un vecteur quelconque (x, y) :

a) rotation ρ d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans le sens positif,

b) symétrie σ par rapport à la droite $y = -x$.

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

		V	F
a)	Toutes les opérations élémentaires sur les lignes sont réversibles.	☐	☐
b)	Une matrice de taille 5×6 a 6 lignes.	☐	☐
c)	L'ensemble des solutions d'un système linéaire dans les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est une liste de nombres $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ qui, substitués à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivement, rendent correcte chaque équation du système.	☐	☐
d)	L'existence et l'unicité d'une solution sont deux questions fondamentales pour un système linéaire.	☐	☐

Exercice 11

Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 18 \\ x + 2y + z = 13 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

possède une solution unique telle que

- ☐ $z = 2$
- ☐ $z = 3$
- ☐ $z = 4$
- ☐ $z = 5$

Réponses de certains exercices:

Ex-1 a) et d) ne sont pas linéaires.

Ex-2 $(6; -1)$.

Ex-4 b) $-\alpha = \beta$, avec $(\alpha, \beta) \neq 0$ (pour que la droite existe).
