

Série 13

Cette série suit le chapitre 6 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *orthogonalité, moindres carrés, QR*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser les bases de sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n suivantes.

L'exercice ne vous demande que de calculer une base orthogonale (pas nécessairement orthonormée) et c'est aussi ce que le solutionnaire vous propose. Vous pouvez bien sûr calculer une base orthonormée (car elle est orthogonale en particulier). Ceci a l'avantage d'également révéler la factorisation QR comme vu en classe.

a) $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ base d'un s.e.v. de \mathbb{R}^3 , avec $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ base d'un s.e.v. de \mathbb{R}^4 , avec $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Donner une base orthonormale pour a) et b).

Exercice 2

- a) Montrer que si Q est une matrice orthogonale, alors Q^T est aussi une matrice orthogonale.
- b) Montrer que si U, V sont des matrices $n \times n$ orthogonales, alors UV est aussi une matrice orthogonale.
- c) Soit \vec{u} un vecteur unitaire de \mathbb{R}^n ($\|\vec{u}\| = 1$). Montrer que la matrice $Q = I_n - 2\vec{u}\vec{u}^T$ est orthogonale.
- d) Montrer que toute valeur propre réelle λ d'une matrice orthogonale Q vérifie $\lambda = \pm 1$.
- e) Soit Q une matrice orthogonale de taille $n \times n$. Soit $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ une base orthogonale de \mathbb{R}^n . Montrer que $\{Q\vec{u}_1, \dots, Q\vec{u}_n\}$ est aussi une base orthogonale de \mathbb{R}^n .

Exercice 3

Soient les vecteurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Par “meilleure approximation”, on veut dire “le vecteur le plus proche”. La distance entre le vecteur et sa meilleure approximation (= sa projection orthogonale) dans un sous-espace est ce qu’on appelle la distance entre le vecteur et le sous-espace. Il existe de nombreuses façon de calculer cette meilleure approximation : commencez avec l’approche basique comme vue en classe. Plus tard, on verra aussi des façons de procéder via moindres carrés (les équations normales) et Gram-Schmidt : cela est aussi expliqué dans les solutions, mais vous pouvez revisiter cela plus tard, quand on en aura parlé en classe.

- Trouver la meilleure approximation de \vec{v} par un vecteur de la forme $\alpha \vec{w}_1 + \beta \vec{w}_2$.
- Calculer la distance entre \vec{v} et $\text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$.

Soient maintenant les vecteurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Trouver la meilleure approximation de \vec{v} par un vecteur de la forme $\alpha \vec{w}_1 + \beta \vec{w}_2$.
- Calculer la distance entre \vec{v} et $\text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$.

Exercice 4

Calculer la décomposition QR des matrices suivantes.

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Soit U un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ une base orthogonale de U . On considère la transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $T(\vec{v}) = \text{proj}_U(\vec{v})$. Montrer que T est une transformation linéaire.

Indication : utiliser la définition de la projection orthogonale.

Exercice 6

Déterminer la solution au sens des moindres carrés de $A\vec{x} = \vec{b}$

a) en utilisant l'équation normale lorsque

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{ii) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{iii) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix};$$

b) en utilisant la méthode QR lorsque

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{ii) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7

Les données suivantes décrivent le potentiel dans un câble électrique en fonction de la température du câble.

i	T_i [$^{\circ}\text{C}$]	U_i [V]
1	0	-2
2	5	-1
3	10	0
4	15	1
5	20	2
6	25	4

On suppose que le potentiel suit la loi $U = a + bT + cT^2$. Calculer a, b, c au sens des moindres carrés.

Exercice 8

On considère les points

x_i	2	5	6	8
y_i	1	2	3	3

On suppose que la relation entre les x_i et les y_i suit une loi $y = ax + b$. Calculer a et b au sens des moindres carrés.

Exercice 9

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- Une base d'un sous-espace vectoriel W de \mathbb{R}^n qui est un ensemble de vecteurs orthogonaux est appelée une base orthonormale.
- Un ensemble $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ orthogonal de vecteurs non nuls de \mathbb{R}^n est linéairement indépendant et de ce fait est une base du sous-espace qu'il engendre.
- Une base orthonormale est une base orthogonale mais la réciproque est fautive en général.
- Si \vec{x} n'appartient pas au sous-espace vectoriel W , alors $\vec{x} - \vec{p}_W(\vec{x})$ n'est pas nul (ici $\vec{p}_W(\vec{x})$ désigne la projection orthogonale de \vec{x} sur W).

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- Soit A une matrice $n \times n$ qui peut se factoriser selon la factorisation QR comme $A = QR$. Alors, $Q^T A = R$.
- Soit W un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Soit $\hat{\vec{y}}$ la projection orthogonale de $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ sur W . Alors $\hat{\vec{y}}$ dépend du choix de la base de W .
- Soit W un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, tel que $W = \text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$. Si $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ satisfait $\vec{z} \perp \vec{w}_1$ et $\vec{z} \perp \vec{w}_2$, alors $\vec{z} \in W^\perp$.
- Soit W un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Si $\vec{y} \in W$, alors sa projection orthogonale sur W est $\vec{p}_W(\vec{y}) = \vec{y}$.

Exercices additionnels

Exercice 11

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- Les colonnes d'une matrice A sont linéairement indépendantes si l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ admet la solution triviale.
- Si A possède des colonnes linéairement dépendantes, alors l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ admet une solution non triviale.
- Les colonnes de toute matrice de taille 4×5 sont linéairement dépendantes.

- d) Si le vecteur nul est l'un des vecteurs d'une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$, alors ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Exercice 12

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Un système d'équations linéaires à trois équations et cinq inconnues est forcément consistant.
- b) Tout système d'équations linéaires à trois équations et deux inconnues est inconsistant.
- c) Si la matrice échelonnée-réduite associée à la matrice augmentée d'un système d'équations linéaires possède une ligne formée de zéros, alors le système possède une infinité de solutions.

Exercice 13

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Une matrice A de taille $m \times n$ ne peut être multipliée par la gauche que par des matrices B de taille $p \times m$.
- b) Le produit matriciel est commutatif.
- c) Si le produit de deux matrices A et B est $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.
- d) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$.

Exercice 14

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Si une matrice A est triangulaire inférieure, alors son déterminant s'obtient comme le produit des éléments de sa diagonale.
- b) $\det A^T = -\det A$ pour toute matrice carrée A .
- c) Il se peut que l'inverse d'une matrice A existe même si $\det A = 0$.
- d) Soient A une matrice $n \times n$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors, $\det(kA) = k^n \det A$.

Exercice 15

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Le plan défini dans \mathbb{R}^3 par $z = 2$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
- b) $\text{Ker}(A) = \{\vec{0}\}$ si et seulement si l'application $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est surjective.

- c) Soit V un espace vectoriel et $u \in V$. Alors l'opposé $-u$ de u est unique et $-u = (-1)u \in V$.
- d) Soit A une matrice de taille $m \times n$, alors $\text{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Exercice 16

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- | | V | F |
|--|--------------------------|--------------------------|
| a) La matrice A n'est pas inversible si et seulement si 0 est une valeur propre de A . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Une matrice A carrée est inversible si et seulement si elle est diagonalisable. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) Les valeurs propres d'une matrice carrée sont sur sa diagonale. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) On trouve les valeurs propres de A en réduisant la matrice à sa forme échelonnée. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Réponses de certains exercices:

Exercices additionnels

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, José Luis Zuleta, ...). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.