

Rappel

Exemple 6.39.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6.6 Méthode des moindres carrés

But : On s'intéresse à des problèmes incompatibles $A\vec{x} = \vec{b}$. A est une matrice $m \times n$ singulière (A peut être carrée si $m = n$ ou non-carrée si $m \neq n$).
On cherche à approximer $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ en trouvant $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $A\vec{x} \approx \vec{b}$.

Exemple 6.40.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Définition 6.41 (solution au sens des moindres carrés).

Soient A une matrice $m \times n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. On appelle *solution au sens des moindres carrés* de $A\vec{x} = \vec{b}$ le vecteur $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

Suite de l'Exemple 6.40

L'équation normale

Théorème 6.42. *L'ensemble des solutions au sens des moindres carrés de $A\vec{x} = \vec{b}$ est*

Exemple 6.43.

Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exemple 6.44.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 6.45. *Soit A une matrice $m \times n$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1.

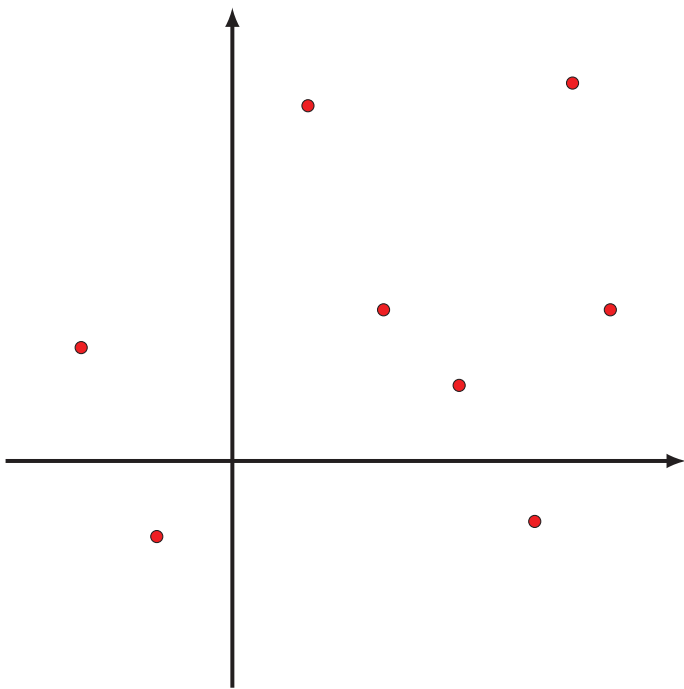
2.

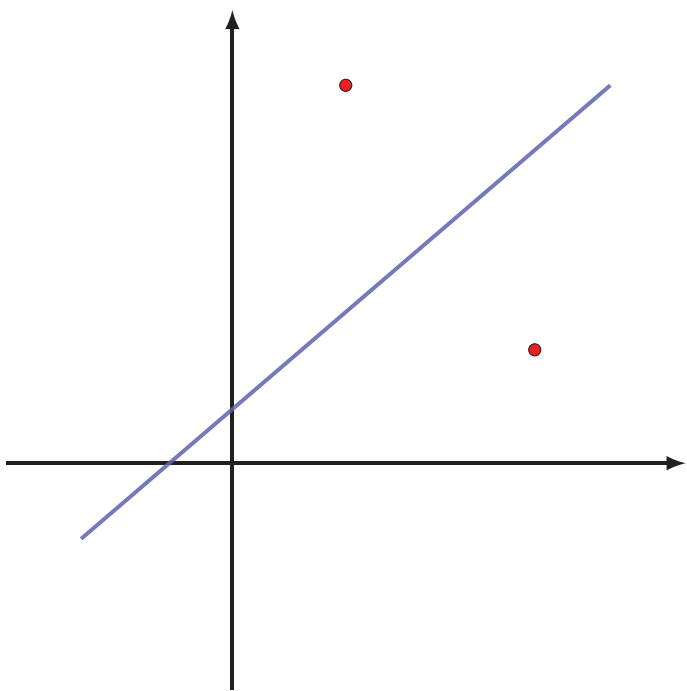
3.

De retour à QR

Théorème 6.46. *Soit A une matrice $m \times n$ dont les colonnes sont linéairement indépendantes. Soient Q et R comme dans la décomposition QR ($A = QR$). Alors pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une unique solution au sens des moindres carrés, données par*

6.7 Droite de régression ou droite des moindres carrés





Exemple 6.47.

Chapitre 7 : matrices symétriques

7.1 Diagonalisation des matrices symétriques

Exemple 7.1.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Diagonalisation en base orthonormale

Remarques et constats

Théorème 7.2. *Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$. Alors*

Schéma

Preuve

Exemple 7.3.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

7.2 Le théorème spectral

Théorème 7.4 (Théorème spectral). *Soit A une matrice $n \times n$ symétrique. Alors on a*

1.

2.

3.

4.

Remarque:

Exemple 7.5.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemple 7.6.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$