Exercice 4.52

Soit $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow a + (b+c)t + dt^2$$

Soit E la base canonique de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ et

$C = (1, 1+t, t^2)$ une base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Donner M la matrice qui représente T dans ces bases E et C.

$$M = \left(\left[T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_C \ \left[T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_C \ \left[T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_C \ \left[T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_C \right)$$

On a $T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$, $T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = t$ et

$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = t^2$ qui sont exprimés dans $(1, t, t^2)$ mais pas dans C.

On trouve facilement : $[1]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[t]_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[t^2]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

et donc $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Méthode avec matrice de changement de base

On a $\left[T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_C = P_{CE}\left[T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_E$ où

$E = (1, t, t^2)$ la base canonique de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Et $P_{CE} = P_{EC}^{-1} = \begin{pmatrix} [1]_E & [1+t]_E & [t^2]_E \end{pmatrix}^{-1}$

On a $P_{EC} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$P_{EC}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $M = P_{CE}\left(\left[T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_E \left[T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_E \left[T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_E \left[T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_E\right)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$