Série 9 (Corrigé)

Cette série suit le chapitre 4 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *bases, coordonnées, changement de base*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Definition 1.1 (dimension) Soit V un espace vectoriel.

1. si V a une famille génératrice avec un nombre fini d'éléments, on dira que V est de dimension finie. On note sa dimension avec $\dim V$ et $\dim V$ est égal au nombre d'éléments dans chaque base de V (chaque base aura le même nombre d'éléments).
2. si V n'admet pas de famille génératrice finie, on dira que V est de dimension infinie. Dans ce cas $\dim V = \infty$
3. si $V = \{0_V\}$ on a $\dim V = 0$.

On a

$$\dim \operatorname{Im}(A) = \text{nombre de colonnes pivots}$$
$$\dim \operatorname{Ker}(A) = \text{nombre de colonnes non-pivots.}$$

Definition 1.2 (rang) Soient V, W des espaces vectoriels et soit $T : V \to W$ une transformation linéaire. On appelle *rang* de T, la dimension de $\operatorname{Im}(T)$. On a

$$\operatorname{rang}(T) = \dim \operatorname{Im}(T)$$

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire, il existe une unique matrice A tell que $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$. On a $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Im}(A)$ et alors $\operatorname{rang}(T) = \operatorname{rang}(A)$. On parlera alors du rang de la matrice A.

Exercice 1

a) On considère le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Trouver les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2)$ de $\mathbb{R}^2$, où $\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Même question pour $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ donné dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à exprimer dans la base $(\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \overrightarrow{b}_3)$ donnée par $\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sol.:

a) Les coordonnées cherchées sont (c_1, c_2) avec $\overrightarrow{v} = c_1 \overrightarrow{b}_1 + c_2 \overrightarrow{b}_2$:
$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, on trouve $c_1 = 2$, $c_2 = -1$.

b) On résout $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{v}$ et on obtient $c_1 = -1$, $c_2 = 3$, $c_3 = 2$.

Exercice 2

On se donne une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

où $[x]_{\mathcal{B}}$ désigne le vecteur des coordonnées du vecteur x dans cette base. Trouver le vecteur $\overrightarrow{x}$ (c'est-à-dire ses coordonnées dans la base standard). Trouver les coordonnées $[y]_{\mathcal{B}}$ du vecteur

$$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.: Les coordonnées $[x]_{\mathcal{B}}$ de x dans la base $\mathcal{B}$ sont les coefficients de l'écriture de x comme combinaison linéaire des vecteurs de base b_1, b_2 et b_3.

Par conséquent, nous avons ici $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, ce qui signifie que

$$\overrightarrow{x} = 3\overrightarrow{b}_1 + 0 \cdot \overrightarrow{b}_2 - \overrightarrow{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Ensuite on nous donne $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base standard, et il s'agit de trouver les coordonnées de $\overrightarrow{y}$ par rapport à la nouvelle base $\mathcal{B}$. C'est le calcul inverse du précédent. On cherche des nombres réels a, b et c tels que $a\,\overrightarrow{b}_1 + b\,\overrightarrow{b}_2 + c\,\overrightarrow{b}_3 = \overrightarrow{y}$. Pour trouver a, b et c il suffit de résoudre un système de trois équations à trois inconnues. Le résultat est $[\overrightarrow{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soit B une matrice sous forme échelonnée.

a) Montrer que les colonnes de B qui ont une position pivot (c.-à-d. les colonnes pivots) sont linéairement indépendantes.

b) Montrer que les colonnes de B qui n'ont pas de position pivot sont combinaison linéaire des colonnes pivots.

Sol.:

a) Soient $\overrightarrow{c}_1, \ldots, \overrightarrow{c}_k$ les colonnes pivots de la matrice B (dans l'ordre de gauche à droite). Soit C la matrice $(\overrightarrow{c}_1 \ldots \overrightarrow{c}_k)$. Toutes les colonnes de C sont des colonnes pivots. C a donc k pivots et k colonnes, l'équation $C\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ n'a donc pas de variables libres et n'a comme solution que la solution triviale $\overrightarrow{0}$. On sait alors que les colonnes de C sont linéairement indépendantes.

Méthode alternative : On montre par récurrence sur k que si une matrice échelonnée possède au moins k colonnes pivots, alors ces k colonnes pivots sont linéairement indépendantes. Si $k = 0$, il n'y a rien à montrer et le résultat est vrai. On suppose le résultat vrai pour un certain k. On suppose que B possède $k+1$ colonnes pivots $\overrightarrow{c}_1, \ldots, \overrightarrow{c}_k, \overrightarrow{c}_{k+1}$. On considère la matrice B privée de la colonne pivot $\overrightarrow{c}_{k+1}$ la plus à droite. Par hypothèse de récurrence, les k premières colonnes pivots $\overrightarrow{c}_1, \ldots, \overrightarrow{c}_k$ sont linéairement indépendantes. Comme la matrice B est échelonnée, on remarque que la ligne de B contenant le pivot de la colonne $\overrightarrow{c}_{k+1}$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

où p est le pivot. Comme $p \neq 0$, la colonne pivot $\overrightarrow{c}_{k+1}$ ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire des colonnes $\overrightarrow{c}_1, \ldots, \overrightarrow{c}_k$. Ainsi les colonnes $\overrightarrow{c}_1, \ldots, \overrightarrow{c}_{k+1}$ sont linéairement indépendantes, ce qui achève la preuve par récurrence.

b) Soient $\overrightarrow{c}_1, \ldots, \overrightarrow{c}_k$ les colonnes pivots de la matrice B (dans l'ordre de gauche à droite) et soit $\overrightarrow{c}_0$ une colonne sans pivot. On considère le système linéaire

$$\overrightarrow{c}_0 = \lambda_1 \overrightarrow{c}_1 + \ldots + \lambda_k \overrightarrow{c}_k$$

d'inconnus les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. On peut l'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{c}_1 & \cdots & \overrightarrow{c}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \overrightarrow{c}_0.$$

Comme la matrice B est échelonnée, on obtient que la matrice augmentée de ce système linéaire est échelonnée avec un pivot dans chaque ligne non nulle. Il possède donc une solution (unique), et $\overrightarrow{c}_0$ est bien combinaison linéaire des colonnes pivots de la matrice B.

Exercice 4

Soit $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×2.

a) Montrer que les matrices A, B et C données par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes.

b) Trouver a, b, c, d tels que pour $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, les matrices A, B, C, D forment une base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Sol.:

a) $\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C = \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

b) On vient en fait de calculer au (i) que $\operatorname{Span}\{A, B, C\}$ est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Comme ce sous-espace est de dimension 3, pour obtenir une base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 4, il suffit de trouver une matrice D qui n'est pas dans ce sous-espace, c-à-d pas de la forme ci-dessus. Il suffit donc de proposer une matrice $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $a \neq c + d$. On peut donc proposer par exemple $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$.

Méthode alternative :

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C + \alpha_4 D = \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2+a\alpha_4 & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+b\alpha_4 \\ \alpha_2+c\alpha_4 & \alpha_1+d\alpha_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+a\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+b\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2+c\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1+d\alpha_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Observons que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a - c - d = 0.$$

Ainsi, A, B, C, D forment une base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow a - c - d \neq 0$.

Exercice 5

Soient $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ et $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. On suppose $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Donner la matrice de changement de base (matrice de passage) de la base C vers la base B :$P_{BC}[\vec{v}]_C = [\vec{v}]_B$.

b) Donner la matrice de changement de base (matrice de passage) de la base B vers la base C : $P_{CB}[\vec{v}]_B = [\vec{v}]_C$.

c) Si $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ est tel que $[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, calculer $[\vec{v}]_C$.

d) À présent, si $[\vec{v}]_C = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculer $[\vec{v}]_B$.

Sol.:

a) P_{BC} est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $\overrightarrow{c}_1$ et $\overrightarrow{c}_2$ dans la base B : $P_{BC} = ([\overrightarrow{c}_1]_B\, [\overrightarrow{c}_2]_B)$. Il faut donc résoudre deux sytèmes linéaires afin de trouver $[\overrightarrow{c}_i]_B$, $i = 1, 2$:

$$\overrightarrow{c}_i = x_{1i}\overrightarrow{b}_1 + x_{2i}\overrightarrow{b}_2 = (\overrightarrow{b}_1 \quad \overrightarrow{b}_2)\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, P_{BC} est la solution de

$$(\overrightarrow{b}_1 \quad \overrightarrow{b}_2)P_{BC} = (\overrightarrow{c}_1 \quad \overrightarrow{c}_2).$$

Si on désigne par E la base canonique, cela peut aussi être interprété comme $P_{EB}P_{BC} = P_{EC}$. Pour résoudre ce système linéaire, on échelonne et on réduit la matrice $(\overrightarrow{b}_1 \quad \overrightarrow{b}_2)$ augmentée avec les vecteurs $\overrightarrow{c}_1$ et $\overrightarrow{c}_2$:

$$(\overrightarrow{b}_1 \quad \overrightarrow{b}_2 | \overrightarrow{c}_1 \quad \overrightarrow{c}_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Ainsi, la matrice de passage cherchée est $P_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$.

b) On a $P_{CB} = P_{BC}^{-1}$, d'où la matrice cherchée est $P_{CB} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$.

c) $[\overrightarrow{v}]_C = P_{CB}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

d) $[\overrightarrow{v}]_B = P_{BC}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

Prouver le théorème suivant. *Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de V. Alors toute famille d'éléments de V de plus de n éléments est une famille linéairement dépendante.*

Sol.:

Soit $\{v_1, \ldots, v_p\}$ avec $p > n$ une famille de vecteurs de V. On sait que l'application coordonnées $[\,\cdot\,]_B : V \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme et donc préserve les relations de dépendances et d'indépendances linéaire. Ainsi $\{[v_1]_B, \ldots, [v_p]_B\}$ est une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$, possédant la même relation de dépendance que $\{v_1, \ldots, v_p\}$.

Grâce au chapitre 1, on sait que $\{[v_1]_B, \ldots, [v_p]_B\}$ est une famille liée dans $\mathbb{R}^n$ car $p > n$. Ainsi il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des réels non tous nuls, tels que

$$\alpha_1[v_1]_B + \ldots + \alpha_p[v_p]_B = \overrightarrow{0}.$$

Or $[\,\cdot\,]_B$ est linéaire, donc on obtient

$$[\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_p v_p]_B = \overrightarrow{0}.$$

où $\overrightarrow{0}$ nous donne les coefficients de $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_p v_p$ comme combinaison linéaire des vecteurs de la base B. Ainsi,

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_p v_p = 0b_1 + 0b_2 + \cdots + 0b_n = 0_V$$

Ainsi $\{v_1, \dots, v_p\}$ n'est pas libre car 0_V s'exprime comme combinaisons linéaires de $v_1, \dots, v_p$ avec des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ non tous nuls.

Exercice 7

Soit $B = (1 - 3t^2, 2 + t - 5t^2, 1 + 2t)$.

a) Vérifier que B est une base de $\mathbb{P}_2$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
b) Déterminer la matrice de changement de bases (matrice de passage) de la base B vers la base canonique $E = \{t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2\}$: $P_{EB}[v]_B = [v]_E$.
c) Écrire $t \mapsto t^2$ comme combinaison linéaire des vecteurs de B.

Sol.:

a) Écrivons la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de B dans la base canonique de $\mathbb{P}_2$, $(1, t, t^2)$:
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$
Cette matrice de déterminant 1 est inversible. Les trois vecteurs de B sont donc linéairement indépendants, et la dimension de $\mathbb{P}_2$ est 3. Par conséquent, B est une base de $\mathbb{P}_2$. La matrice P est en fait la matrice de passage de la base B vers la base canonique.
b) La matrice P du a).
c) Les coordonnées de $t \mapsto t^2$ dans la base canonique sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par définition de la matrice de passage P du b), les coordonnées de $t \mapsto t^2$ dans la base B sont donc la solution du système
$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
On résout : $x = 3, y = -2, z = 1$.

Exercice 8

Soit W le sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ des matrices symétriques ($A = A^T$). On considère les matrices suivantes de W :
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$
Utiliser la méthode de Gauss pour extraire de $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ une base de W.

Sol.: La méthode de Gauss pour extraire de $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ une base de W est la suivante. On commence en formant la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de coordonnées des A_i (dans la base canonique de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et on s'empresse d'échelonner :
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On garde les matrices (A_1, A_2, A_4) qui correspondent aux colonnes pivots de la matrice ci-dessus. On a bien une base de W puisque W est un sous-espace de dimension 3 de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (ce qui se voit par exemple en remarquant que la dimension est strictement plus petite que 4 et que les trois matrices choisies sont linéairement indépendantes comme le montrent nos calculs ; ou encore en remarquant que les matrices symétriques sont définies par une équation $a_{12} = a_{21}$).

Exercice 9

Soit $B = (1 + t^2, 1 - 3t^2, 1 + t - 3t^2)$ une base de $\mathbb{P}_2$. Soit $E = (1, t, t^2)$ la base canonique de $\mathbb{P}_2$.

1. Soit $q \in \mathbb{P}_2$ donné par

$$[q]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   Trouver $[q]_E$ en suivant les différentes méthodes vues en cours.
   a) En utilisant une multiplication matrice-vecteur : $P_{EB}[q]_B = [q]_E$.
   b) Sans passer pas une matrice de changement de base, mais en utilisant la définition de $[\cdot]_B$.
   c) Résoudre $P_{BE}[q]_E = [q]_B$.
2. Soit maintenant $q(t) = -2 + 5t - 2t^2$. Trouver $[q]_B$ en suivant les différentes méthodes vues en cours.
   a) En utilisant une multiplication matrice-vecteur : $P_{BE}[q]_E = [q]_B$.
   b) Sans passer pas une matrice de changement de base, mais en utilisant la définition de $[\cdot]_E$.
   c) Résoudre $P_{EB}[q]_B = [q]_E$.

Sol.:

1. Soit $q \in \mathbb{P}_2$ donné par

$$[q]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   a) La matrice P_{EB} de changement de base de la base B à la base E est

$$P_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

   Ainsi $[q]_E$ s'obtient par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

   et $q(t) = 2 + 2t - 10t^2$.

b) Par définition de $[\cdot]_B$, on a

$$[q]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow q(t) = -1(1+t^2) + 1(1-3t^2) + 2(1+t-3t^2)$$

Et en réarrangeant les termes de même ordre, on obtient $q(t) = 2 + 2t - 10t^2$.

c) Par définition

$$P_{BE} = \begin{pmatrix} [1]_B & [t]_B & [t^2]_B \end{pmatrix}$$

qui n'est pas facilement calculable. Or on sait que $P_{BE} = P_{EB}^{-1}$. On calcule l'inverse de la matrice du point a).

2. Soit $q(t) = -2 + 5t - 2t^2$. On sait que

$$[q]_E = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) On peut trouver $[q]_B$ en multipliant P_{BE} avec $[q]_E$. Or la matrice P_{BE} n'est pas facilement calculable. Il faudrait inverser P_{EB} qui est donnée par

$$P_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) Par définition de $[q]_E$, on a

$$[q]_E = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -2 + 5t - 2t^2$$

Pour trouver $[q]_B$ il faut réarranger les termes et trouver a, b, c tels que

$$q(t) = a(1+t^2) + b(1-3t^2) + c(1+t-3t^2).$$

Ce n'est pas toujours évident de trouver les a, b, c. Ici $a = -2$, $b = -5$ et $c = 5$.

c) Résoudre $P_{EB}[q]_B = [q]_E$. On doit échelonner

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & -3 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Et on obtient

$$[q]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 10

a) Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^2$ donné par $W = \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ où $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Trouver un sous-ensemble B de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ tel que B soit une base de W.

c) Agrandir l'ensemble $\{\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2\} \subset W$ pour obtenir une base de W.

Sol.:

a) Deux. En effet, les vecteurs $\overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$ sont linéairement indépendants, donc la dimension est au moins deux. Elle est inférieure ou égale à 2 car c'est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$.

b) $B = \{\overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ — c'est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. (Note : $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_3\}$ et $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$ sont aussi possibles).

c) L'espace W est de dimension deux, donc n'importe quel vecteur non colinéaire à $\overrightarrow{v}_1+\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ convient. Par exemple, on peut proposer la base $\{\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_1\}$ de W.

Exercice 11

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le rang de A et la dimension du noyau de A.

b) Même question pour A^T.

c) On suppose qu'une matrice A de taille 7×7 possède un pivot dans chaque ligne. Quel est le rang de A ? Quelle est la dimension du noyau de A ?

d) On considère une matrice A de taille $m \times n$ et un vecteur $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$. Quelle doit être la relation entre le rang de $[\, A \ \ \overrightarrow{b}\,]$ et le rang de A pour que l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ soit compatible ?

Sol.:

a) Les colonnes 1, 2 et 4 forment une base de $\mathbb{R}^3$, donc $\mathrm{rg}(A) = 3$. Par le théorème du rang, on a
$$\dim \mathrm{Ker}\, A = (\text{nombre de colonnes de } A) - \mathrm{rg}(A) = 4 - 3 = 1.$$

b) $\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A) = 3$.
$$\dim \mathrm{Ker}\, A^T = (\text{nombre de colonnes de } A^T) - \mathrm{rg}(A^T) = 3 - 3 = 0.$$

c) A est équivalente à la matrice identité de taille 7×7, ainsi $\mathrm{rg}(A) = 7$ et $\dim \mathrm{Ker}\, A = 0$.

d) $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ est compatible $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{b}$ est une combinaison linéaire des colonnes de $A \Leftrightarrow \overrightarrow{b} \in \mathrm{Col}\, A$ $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}([\, A \ \ \overrightarrow{b}\,])$.

Exercice 12

a) Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$ sont équivalentes (c'est-à-dire qu'on peut passer de A à B avec des opérations élémentaires sur les lignes).

b) Calculer $\mathrm{rang}(A)$, $\dim(\mathrm{Ker} A)$, $\mathrm{rang}(B)$, $\dim(\mathrm{Ker} B)$.

c) Trouver une base de $\mathrm{Ker} A$ et $\mathrm{Ker} B$.

Sol.:

a) En échelonnant/réduisant la matrice A par des opérations élémentaires sur les lignes, on obtient la matrice B.

b) La matrice B est sous forme échelonnée réduite, on peut donc lire $\text{rang}(B) = 3$ (trois pivots) et $\dim \text{Ker}B = 1$. Comme A et B sont équivalentes d'après a), on a $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = 3$ et $\dim \text{Ker}A = \dim \text{Ker}B = 1$.

c) Comme B est la forme échelonnée réduite de A, on a $\text{Ker}A = \text{Ker}B$, et une base de $\text{Ker}B$ est aussi une base de $\text{Ker}A$. $\text{Ker}B$ est l'espace des solutions de $B\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, de dimension 1. On obtient ainsi la base $\left\{\begin{pmatrix}19\\-11\\\frac{7}{2}\\1\end{pmatrix}\right\}$.

<u>Exercices additionnels</u>

Exercice 13

Soit la matrice

$$C = \begin{pmatrix}5&1&2&2&0\\3&3&2&-1&-12\\8&4&4&-5&12\\2&1&1&0&-2\end{pmatrix}$$

1. Trouver une base de $\text{Ker}C$.
2. On note par T la transformation linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par $T(\overrightarrow{x}) = C\overrightarrow{x}$. L'application T est-elle injective ? T est-elle surjective ? Justifier votre réponse.

Sol.: L'espace nul ou noyau de C est la solution générale de l'équation $C\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. On doit résoudre cette équation pour trouver une base de $\text{Ker}C$. On échelonne puis on réduit C :

$$\begin{pmatrix}5&1&2&2&0\\3&3&2&-1&-12\\8&4&4&-5&12\\2&1&1&0&-2\end{pmatrix} \sim \begin{array}{c}l_4\\l_1\\l_2\\l_3\end{array}\begin{pmatrix}2&1&1&0&-2\\5&1&2&2&0\\3&3&2&-1&-12\\8&4&4&-5&12\end{pmatrix} \sim \begin{array}{c}\\l_2-\frac{5}{2}l_1\\l_3-\frac{3}{2}l_1\\l_4-4l_1\end{array}\begin{pmatrix}2&1&1&0&-2\\0&-3/2&-1/2&2&5\\0&3/2&1/2&-1&-9\\0&0&0&-5&20\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{c}.\\.\\l_3+l_2\\.\end{array}\begin{pmatrix}2&1&1&0&-2\\0&-3/2&-1/2&2&5\\0&0&0&1&-4\\0&0&0&-5&20\end{pmatrix} \sim \begin{array}{c}.\\.\\.\\l_4+5l_3\end{array}\begin{pmatrix}2&1&1&0&-2\\0&-3/2&-1/2&2&5\\0&0&0&1&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

On reduit la forme échelonnée précédente :

$$C \sim \begin{array}{c}.\\l_2-2l_3\\.\\.\end{array}\begin{pmatrix}2&1&1&0&-2\\0&-3/2&-1/2&0&13\\0&0&0&1&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{array}{c}.\\-\frac{2}{3}l_2\\.\\.\end{array}\begin{pmatrix}2&1&1&0&-2\\0&1&1/3&0&-26/3\\0&0&0&1&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{c} l_1 - l_2 \\ . \\ . \\ . \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 & 20/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & -26/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forme échelonnée réduite de C est donc $C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 & 10/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & -26/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On écrit le système $C'\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ sous la forme classique, pouvant à présent exprimer chaque inconnue principale en fonction des inconnues secondaires :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{10}{3}x_5 & = & 0 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{26}{3}x_5 & = & 0 \\ x_4 - 4x_5 & = & 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & -\frac{1}{3}x_3 - \frac{10}{3}x_5 \\ x_2 & = & -\frac{1}{3}x_3 + \frac{26}{3}x_5 \\ x_3 & = & x_3 \\ x_4 & = & 4x_5 \\ x_5 & = & x_5 \end{array} \right.$$

La forme vectorielle de ce système est :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -10/3 \\ 26/3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient la solution générale du système $C\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$:

$$\overrightarrow{x} = \alpha \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -10/3 \\ 26/3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour tous } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Le noyau de C est engendré par les vecteurs obtenus ci-dessus, que l'on choisit par exemple de multiplier par 3 pour éviter des fractions :

$$\overrightarrow{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{w}_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 26 \\ 0 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. L'application T n'est pas surjective puisque l'espace des colonnes n'engendre pas $\mathbb{R}^4$ et elle n'est pas injective puisque le vecteur nul n'est pas la seule solution de $C\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 14

Soit h un nombre réel et D la matrice carrée $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & h \end{pmatrix}$. On définit une application $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ par $T(A) = D \cdot A$.

1. Déterminer si T est linéaire (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).
2. Déterminer si T est surjective (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).
3. Déterminer si T est injective (discuter si nécessaire en fonction des valeurs du paramètre h).

Indication. Traiter le cas où D est inversible pour résoudre une équation de type $D \cdot A = B$.

Sol.: L'application T est linéaire, nous avons vu en cours que la multiplication matricielle est distributive (compatibilité avec la somme) et compatible avec l'action.

Puisque $\det D = h + 4$, la matrice D est inversible pour $h \neq -4$. On traite ce cas d'abord et on s'occupera du cas $h = -4$ par la suite.

Lorsque D est inversible, l'équation $D \cdot A = B$ est équivalente à l'équation

$$A = I \cdot A = D^{-1} \cdot D \cdot A = D^{-1} \cdot B$$

Ainsi T est surjective puisque toute matrice B est obtenue comme $T(D^{-1} \cdot B)$. De plus T est injective puisque la seule matrice A qui est envoyée sur zéro est la matrice $D^{-1} \cdot (0) = (0)$.

Il reste à traiter le cas où $h = -4$. Ici T est donnée par la formule

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2c & b - 2d \\ 2a - 4c & 2b - 4d \end{pmatrix}$$

On voit ici que les deux lignes de la matrice TA sont proportionnelles, ce qui signifie que T ne peut être surjective. Une matrice qui n'a pas cette propriété n'est pas de la forme TA. Par exemple il n'existe aucune matrice A telle que $TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette application n'est pas injective non plus puisque $T \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.