Série 8 (Corrigé)

Cette série suit le chapitre 4 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *espaces vectoriel, sous espace vectoriel, application linéaire, noyau, image, bases, coordonnées*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Soit $\mathbb{P} = \{p(t) = (a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots) \ : \ a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On définit sur cet ensemble les deux lois suivantes : la loi d'addition $p + q : (p + q)(t) = p(t) + q(t)$, $t \in \mathbb{R}$, et la loi de multiplication par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha p : (\alpha p)(t) = \alpha\, p(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $\mathbb{P}$ muni des deux lois définies plus haut est un espace vectoriel.

b) Montrer que l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_n = \{p(t) = (a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) \ : \ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ muni des deux mêmes lois est un espace vectoriel.

c) Montrer que l'ensemble des polynômes de degré 2

$$\{p(t) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) \ : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R},\ a_2 \neq 0\}$$

muni des deux mêmes lois ***n'est pas*** un espace vectoriel.

Soit $\mathbb{S} = \{y = (..., y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, ...) = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}} \ : \ \forall k \in \mathbb{Z}, y_k \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des suites réelles sur $\mathbb{Z}$. On définit sur cet ensemble les deux lois suivantes : la loi d'addition $w = y+z$: $w_k = y_k + z_k$, $k \in \mathbb{Z}$, et la loi de multiplication par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, $w = \alpha y$: $w_k = \alpha y_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Montrer que $\mathbb{S}$ muni des deux lois définies plus haut est un espace vectoriel.

Soit $\mathbb{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit sur cet ensemble les deux lois suivantes : la loi d'addition $f+g : (f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, et la loi de multiplication par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f : (\alpha f)(x) = \alpha\, f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

e) Montrer que $\mathbb{F}$ muni des deux lois définies plus haut est un espace vectoriel.

f) On munit $\mathbb{F}$ des deux lois définies plus haut. Montrer que $\mathbb{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$.

g) Montrer que l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $C(\mathbb{R})$, muni des deux mêmes lois, est un espace vectoriel.

h) On munit $C(\mathbb{R})$ de ces deux mêmes lois. Montrer que

$$C^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ est dérivable de dérivée continue}\}$$

est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$.

Sol.:

Un espace vectoriel réel est un ensemble non vide V d'objets (appelés vecteurs) sur lesquels sont définies deux opérations : l'addition

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \to & V \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$

et la multiplication par un scalaire

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times V & \to & V \\ (\alpha, u) & \mapsto & \alpha u. \end{array}$$

Ces deux opérations doivent satisfaire les propriétés suivantes pour tous $u, v, w \in V$ et $c, d \in \mathbb{R}$. **Attention** : l'ordre des axiomes peut différer d'un cours à l'autre. De plus on ne met pas dans cette liste les axiomes $u + v \in V$ (l'espace est fermé pour la loi d'addition) et $cv \in V$ (l'espace est fermé pour la loi de multiplication par scalaire). Ils doivent quand même être vérifiés en premier.

1. $u + v = v + u$
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. Il existe un élément $-u \in V$ tel que $u + (-u) = 0_V$
4. Il existe un élément zéro 0_V dans V tel que $u + 0_V = u$ pour tout u dans V
5. $c(u + v) = cu + cv$
6. $(c + d)u = cu + du$
7. $c(du) = (cd)u$
8. $1u = u$.

a) On doit tout d'abord vérifier que l'espace $\mathbb{P}$ est fermé pour les lois d'addition et de multiplication par un scalaire (i.e. ces opérations sont à valeurs dans $\mathbb{P}$). Pour l'addition, on considère deux polynômes p et q donnés par $(a_0 + a_1t + ...)$ et $(b_0 + b_1t + ...)$. Alors $(p + q)(t) = (a_0 + a_1t + ...) + (b_0 + b_1t + ...) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + ...$ qui est de la même forme que p ou q et est donc un polynôme à coefficients réels. Le même raisonnement permet de conclure quant à l'autre loi.
On doit maintenant vérifier les 8 propriétés ci-dessus.
L'élément zéro de la propriété 4 est donné par le polynôme nul $p \equiv 0$ (c-à-d $p(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$). Les autres propriétés s'obtiennent de la même manière par calcul direct.

b) On vérifie d'abord que l'espace $\mathbb{P}_n$ est fermé pour les lois d'addition et de multiplication par un scalaire. Pour l'addition, on considère deux polynômes p et q donnés par $(a_0 + a_1t + ... + a_nt^n)$ et $(b_0 + b_1t + ... + b_nt^n)$. Alors

$$\begin{aligned}(p + q)(t) &= (a_0 + a_1t + ... + a_nt^n) + (b_0 + b_1t + ... + b_nt^n) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + ... + (a_n + b_n)t^n,\end{aligned}$$

qui est bien un polynôme de degré $\leq n$. Même raisonnement pour l'autre loi.

On doit ensuite de nouveau montrer que les 8 propriétés ci-dessus sont vérifiées.
L'élément zéro de la propriété 4 est donné par le polynôme nul $p \equiv 0$. Les autres propriétés s'obtiennent de la même manière par calcul direct. À noter que $-p$ est défini par $-p(t) = (-1)p(t) = -a_0 - a_1 t - ... - a_n t^n$. À noter également qu'une autre manière de procéder aurait été de montrer que $\mathbb{P}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}$.

c) Il suffit de montrer qu'au moins l'une des 8 propriétés ci-dessus n'est pas vérifiée.
L'élément zéro devrait être le polynôme nul $p \equiv 0$, qui n'est pas un polynôme de degré 2, et donc n'appartient pas à l'espace, ce qui contredit la propriété 4.
Autre solution : on peut montrer que l'ensemble n'est pas fermé pour l'addition. On considère deux polynômes p et q de degré 2 donnés par $p(t) = (t + t^2)$, $q(t) = (t - t^2)$. On a

$$(p+q)(t) = \left(t + t^2\right) + \left(t - t^2\right) = 2t,$$

qui est un polynôme de degré 1 et non 2. Par conséquent il n'appartient pas à l'ensemble.

d) L'espace $\mathbb{S}$ est fermé pour les deux lois, en effet les objets $(..., y_{-2} + z_{-2}, y_{-1} + z_{-1}, y_0 + z_0, y_1 + z_1, y_2 + z_2, ...)$ et $(..., \alpha y_{-2}, \alpha y_{-1}, \alpha y_0, \alpha y_1, \alpha y_2, ...)$ sont bien des suites réelles sur $\mathbb{Z}$.

On doit ensuite vérifier les 8 propriétés ci-dessus.
Le seul candidat possible comme suite nulle est le vecteur $0_{\mathbb{S}} = 0y = (..., 0, 0, 0, ...)$. On vérifie que

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{S}} + y = (..., 0 + y_{-2}, 0 + y_{-1}, 0 + y_0, 0 + y_1, 0 + y_2, ...) \\ = (..., y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, ...) = y. \end{aligned}$$

Le candidat à être l'opposé de y est $-y = (-1)y = (..., -y_{-1}, -y_0, -y_1, ...)$. On vérifie que $y + (-y) = ... = 0_{\mathbb{S}}$.

Les autres propriétés s'obtiennent immédiatement avec la même technique.

e) L'espace $\mathbb{F}$ est fermé pour les deux lois. En effet, $f + g$ et αf définissent bien des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On doit ensuite vérifier les 8 propriétés.
L'élément zéro est donné par la fonction nulle $f \equiv 0$ (i.e. $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Les autres propriétés s'obtiennent immédiatement.

f) Un sous-ensemble H d'un espace vectoriel V est un sous-espace vectoriel si les propriétés suivantes sont vérifiées :
   i) Le vecteur nul de V est dans H.
   ii) H est fermé pour l'addition, c-à-d, pour tous u et v dans H, la somme $u + v$ est dans H.
   iii) H est fermé pour la multiplication par un scalaire, c-à-d, pour tous $u \in H$ et $c \in \mathbb{R}$, le vecteur cu est dans H.

D'abord, l'espace des fonctions polynomiales est un sous-ensemble de l'espace des fonctions. Ensuite, on doit vérifier la propriété i), les autres propriétés ii) et iii) ayant déjà été vérifiées en a). L'élément *zéro* de l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donné par la fonction nulle $f \equiv 0$, qui peut être vue comme le polynôme nul, qui appartient bien à l'espace des polynômes.

g) Tout d'abord, par le cours d'analyse, on sait que la somme de deux fonctions continues est continue, de même pour le produit d'une fonction continue par un scalaire.
On doit ensuite vérifier les 8 propriétés. L'élément nul est donné par la fonction nulle $f \equiv 0$ qui est bien continue, et les autres propriétés sont vérifiées de la même manière. On aurait pu, alternativement, montrer que $C(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$.

h) On doit encore vérifier les propriétés énoncées au f).

   i) Le vecteur nul de $C(\mathbb{R})$ est donné par la fonction nulle $f \equiv 0$, qui est différentiable et est donc aussi dans $C^1(\mathbb{R})$.
   ii) On sait par le cours d'analyse que la somme de deux fonctions de $C^1(\mathbb{R})$ est encore dans $C^1(\mathbb{R})$.
   iii) De même pour la multiplication par un scalaire.

Exercice 2

On rappelle que $\mathbb{P}_3$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

a) Les vecteurs de $\mathbb{P}_3$ suivants sont-ils linéairement indépendants ?
   (i) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 - t^2$, $p_2(t) = t^2$, $p_3(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$.
   (ii) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 + t + t^2$, $p_2(t) = t + t^2$, $p_3(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Les vecteurs p_1, p_2, p_3 de (ii) forment-ils une base de $\mathbb{P}_3$?

Sol.:

a) i) Oui. En effet,

$x_1p_1(t) + x_2p_2(t) + x_3p_3(t) = x_1(1 - t^2) + x_2t^2 + x_3t = t^2(x_2 - x_1) + x_3t + x_1 = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ ssi

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 = 0, \end{cases}$$

i.e. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

   ii) Oui

b) Non, aucun des trois vecteurs ne permet d'engendrer un polynôme de degré égal à 3. Par exemple t^3 n'est pas une combinaison linéaire de p_1, p_2 et p_3. Plus tard on verra que $\dim(\mathbb{P}_3) = 4$ et il y a seulement trois vecteurs, donc ça ne peut pas être une base.

Exercice 3

Soit $\mathbb{P}_2$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, dont on admet que c'est un espace vectoriel. On considère la transformation $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que T est linéaire.
b) Trouver une base de $\operatorname{Ker} T$.
c) Trouver une base de $\operatorname{Im} T$.

Sol.:

a) Pour tous $p_1, p_2, p \in \mathbb{P}_2$ et $c \in \mathbb{R}$, on a :

$$T(p_1 + p_2) = \begin{pmatrix} p_1(0) + p_2(0) \\ p_1(0) + p_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_1(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_2(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix} = T(p_1) + T(p_2).$$

$$T(cp) = \begin{pmatrix} cp(0) \\ cp(0) \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = cT(p).$$

b) $T(p) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow p(0) = 0$. Considérons un polynôme $p \in \mathbb{P}_2$ de la forme $p(t) = c_2t^2 + c_1t + c_0$. On a $p(0) = 0 \Leftrightarrow c_0 = 0 \Leftrightarrow p(t) = c_2t^2 + c_1t$. Ainsi, une base de $\operatorname{Ker} T$ est $\{t, t^2\}$.

c) Soit p de la forme $p(t) = c_2t^2 + c_1t + c_0$. L'image $\operatorname{Im} T$ est l'ensemble des vecteurs $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, une base de $\operatorname{Im} T$ est le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Soit $\mathbb{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2. Parmi les quatre sous-ensembles de $\mathbb{P}_2$ ci-dessous, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{P}_2$

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_0 = a_2^2\} \\
E_2 &= \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, p(0) = 1\} \\
E_3 &= \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, p'(t) = 0\} \\
E_4 &= \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_0 = a_1 = a_2\}
\end{aligned}$$

Sol.: E_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_2$ car il n'est pas stable sous l'addition : si

$p(t), q(t) \in E_1$ alors $p(t) = a_0 + a_1 + a_2t^2$, $q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2$ avec $a_0 = a_2^2$ et $b_0 = b_2^2$

$$p(t) + q(t) = a_2^2 + a_1t + a_2t^2 + b_2^2 + b_1t + b_2t^2 = (a_2^2 + b_2^2) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2.$$

et comme $(a_2^2 + b_2^2) \neq (a_2 + b_2)^2$, $p(t) + q(t) \notin E_1$

E_2 n'est pas un sous-espace vecoriel de $\mathbb{P}_2$ car le polyôme nul n'est pas dans E_2, car il ne vérifie pas $p(0) = 1$. En effet les polynômes de E_2 sont de la forme $p(t) = 1 + a_1t + a_2t^2$ (comme cela quand $t = 0$ on a $p(0) = 1$).

Les deux derniers sont des sous-espaces vectoriels car ils vérifient les 3 axiomes.

Exercice 5

On rappelle qu'une base d'un espace vectoriel est un système de génèrateurs linéairement indépendants. Vous pouvez ignorer la partie (c).

a) Prouver que les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Démontrer que l'ensemble $\mathcal{F} = \{1 + t^2, t + t^2, 1 + 2t + t^2\}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré 2.

c) Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles. Montrer que les fonctions $\sin^2 t$ et $\cos^2 t$ sont linéairement indépendantes. Forment-elles une base de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

d) Soit $M_{2\times3}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×3. Montrer que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes. Comment faire pour complèter cette famille de quatre matrices en une base de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$?

Sol.:

a) Pour montrer que les trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$ il suffit de vérifier que la matrice A de taille 3×3 formée en plaçant ces vecteurs dans les colonnes possède trois pivots. En effet on sait alors que tout système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$ a une unique solution. Ceci signifie d'une part que tout vecteur $\overrightarrow{v}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$. Il s'agit donc d'un système de générateurs. On en déduit aussi d'autre part que la seule solution du système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ est le vecteur nul, si bien que les trois colonnes de A sont libres.

b) Pour montrer que $\mathcal{F} = \{1+t^2, t+t^2, 1+2t+t^2\}$ forme une base de $\mathbb{P}_2$, il suffit de montrer que ces polynômes sont linéairement indépendants car trois vecteurs libres dans un espace vectoriel de dimension 3 en forment une base.

   Ecrivons donc une combinaison linéaire arbitraire et regardons quand elle donne le polynôme nul :

$$\alpha(1+t^2) + \beta(t+t^2) + \gamma(1+2t+t^2) = (\alpha+\gamma) + (\beta+2\gamma)t + (\alpha+\beta+\gamma)t^2$$

   Ce polynôme est nul si et seulement si tous les coefficients sont nuls. On est donc amené à résoudre un système de trois équations à trois inconnues. On constate que la seule solution est la solution triviale.

c) Les fonctions $\sin^2 t$ et $\cos^2 t$ sont linéairement indépendantes si la seule combinaison linéaire

$$f(t) = \alpha \sin^2 t + \beta \cos^2 t$$

   qui donne la fonction nulle (constamment nulle !), est donnée par $\alpha = \beta = 0$. Or, on calcule $f(0) = \beta$ et $f(\pi/2) = \alpha$. Si la fonction f est nulle, elle s'annule en particulier en 0 et en $\pi/2$. Par conséquent $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

   Ces deux fonctions ne forment pas une base de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet toute combinaison linéaire des fonctions $\sin^2 t$ et $\cos^2 t$ est continue, si bien que la fonction $f(t)$ qui vaut 1 en zéro et zéro partout ailleurs ne peut appartenir à $\mathrm{Vect}(\sin^2 t, \cos^2 t)$. En fait de nombreuses fonctions continues n'y sont pas non plus, par exemple $g(t) = t$.

d) Il s'agit à nouveau de comprendre quand une combinaison linéaire des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   donne la matrice nulle. A nouveau, nous sommes amenés à résoudre un système homogène (de quatre équations et quatre inconnues) donné par les coefficients de la combinaison linéaire $\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = 0$. On calcule $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, si bien que les matrices données sont libres.

   Pour complèter cette famille de quatre matrices en une base de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, il y a de nombreuses options. On peut par exemple observer que les quatre matrices ont des coefficients nuls dans la 3ème colonne. Il suffit d'ajouter les deux matrices e_{13} et e_{23} pour trouver une base.

Exercice 6

Soient V et W deux espaces vectoriels, T une transformation linéaire : $T : V \to W$ et $\{v_1, \ldots, v_p\}$ un sous-ensemble de V.

a) Montrer que si l'ensemble $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est linéairement dépendant alors l'ensemble $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ est linéairement dépendant.
b) Supposons que la transformation T est injective, c'est-à-dire que $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$. Montrer que si l'ensemble $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est linéairement indépendant alors l'ensemble $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ est linéairement indépendant.

Sol.:

a) Si $\{v_1, \ldots, v_p\}$ sont linéairement dépendants, alors il existe des nombres réels $c_1, \ldots, c_p$, non tous nuls, tels que :
$$c_1 v_1 + \ldots + c_p v_p = 0.$$
Puisque T est linéaire,
$$T(c_1 v_1 + \ldots + c_p v_p) = T(0) = 0 \quad \text{et} \quad c_1 T(v_1) + \ldots + c_p T(v_p) = 0.$$
Comme les c_i ne sont pas tous nuls, $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ sont linéairement dépendants.
b) On suppose que $\{v_1, \ldots, v_p\}$ sont linéairement indépendants. Pour montrer que $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ sont linéairement indépendants, considérons une combinaison linéaire donnant le vecteur nul :
$$c_1 T(v_1) + \ldots + c_p T(v_p) = 0.$$
Puisque T est linéaire et que $0 = T(0)$, on peut écrire cela sous la forme suivante :
$$T(c_1 v_1 + \ldots + c_p v_p) = T(0).$$
Par hypothèse, T est injective, donc cette équation implique que $c_1 v_1 + \ldots + c_p v_p = 0$. Puisque les vecteurs $\{v_1, \ldots, v_p\}$ sont linéairement indépendants, on conclut que $c_1 = \cdots = c_p = 0$.

Exercice 7

Soient
$$\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5/2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$
Déterminer si $\overrightarrow{w}$ est dans ImA, dans Ker$A$ ou bien dans les deux.

Sol.: Le vecteur $\overrightarrow{w}$ est dans Ker$A$ car on calcule $A\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

Le vecteur $\overrightarrow{w}$ est aussi dans ImA car le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{w}$ est compatible (il suffit d'examiner la forme échelonnée réduite de sa matrice augmentée). Ainsi, il existe au moins un vecteur, par exemple $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tel que $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{w}$.

Exercice 8

Soient $p_1(t) = 1 - t$, $p_2(t) = t^3$, $p_3(t) = t^2 - t + 1$. Est-ce que le polyôme $q(t) = t^3 - 2t + 1$ est dans le span$\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$? ***Sol.:*** Il y a deux méthodes possibles. Méthode 1 : en

utilisant l'application coordonnée et en échelonnant la matrice associée. Soit $\mathcal{E} = (1, t, t^2, t^3)$ la base canonique de $\mathbb{P}_3$ (avec l'ordre qui compte !). On a

$$[p_1]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, [p_2]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, [p_3]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ and } [q]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On peut échelonner la matrice augmentée $A = ([p_1]_{\mathcal{E}}\, [p_2]_{\mathcal{E}}\, [p_3]_{\mathcal{E}} \mid [q]_{\mathcal{E}})$. On obtient

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

et le système est incompatible. On peut aussi voir si la matrice A est inversible ce qui impliquera que les 4 vecteurs sont linéairement indépendants, et donc que $q(t)$ n'est pas dans le span. Ceci peut se faire en calculant le déterminant ou en échelonnant la matrice.

Méthode 2 : on essaie de trouver les coefficients de la combinaison linéaire (s'ils existent)

$$q(t) = \alpha_1 p_1(t) + \alpha_2 p_2(t) + \alpha_3 p_3(t)$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} q(t) &= \alpha_1(1 - t) + \alpha_2 t^3 + \alpha_3(t^2 - t + 1) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_3) + (-\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha_3 t^2 + \alpha_2 t^3 \end{aligned}$$

Pour que cette égalité soit vraie, il faut que les coefficients de chaque monôme (les coefficients devant $1, t, t^2, t^3$) soient égaux. Donc on doit résoudre

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 1 \\ -\alpha_1 - \alpha_3 = -2 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Ce qui n'est pas possible car on devrait avoir $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_1 = 2$ (vu que $\alpha_3 = 0$).

Donc $q(t)$ n'est pas dans le span p_1, p_2, p_3.

Exercice 9

Soit $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels.

1. Soit $V = \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid M \text{soit inversible}\}$. Alors
   - ☐ V est un sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}$
   - ☐ V est un espace vectoriel.
   - ☐ V n'est pas un espace vectoriel.
   - ☐ V est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices inversibles.

2. Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

   ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. Quelle famille ci-dessous est une base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

   ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

   ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

   ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Sol.:

1. V n'est pas un sous-espace vectoriel
2. $[M]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Soient V un espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de V. Alors on a aussi que V est un sous-espace vectoriel de lui-même (ou d'un espace vectoriel plus grand) et H est un espace vectoriel. ☐ ☐
b) Si H est un sous-ensemble d'un espace vectoriel V, alors il suffit que 0_V soit dans H pour que H soit un sous-espace vectoriel de V. ☐ ☐
c) Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$. ☐ ☐
d) Le noyau d'une matrice A n'est pas nécessairement un espace vectoriel. ☐ ☐

Sol.:

a) Vrai. Les vérifications des axiomes d'espace vectoriel et de sous-espace vectoriel sont immédiates dans ce cas.

b) Faux. Par exemple $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ bien que $0 \in \mathbb{Z}$.

c) Vrai. Une matrice A de taille $n \times n$ est inversible si et seulement si $\text{rang}(A) = n$ et donc, par le théorème du rang, si et seulement si $\dim \text{Ker}(A) = 0$. Ceci est équivalent à dire $\text{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$.

d) Faux. Le noyau d'une matrice est *toujours* un espace vectoriel.

Exercice 11

a) Soit a, b, c des nombres réels. On considère les quatre polynômes $p(t) = t^2 + t + 1$, $q(t) = t^2 + 2t + a$, $r(t) = t^3 + b$ et $s(t) = t + c$. Alors

☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ forme une base de $\mathbb{P}_4$ pour certaines valeurs des paramètres a, b, c ;

☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ forme une base de $\mathbb{P}_3$ pour certaines valeurs des paramètres a, b, c ;

☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ est toujours linéairement dépendante dans $\mathbb{P}_4$;

☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ est linéairement dépendante dans $\mathbb{P}_3$ lorsque $a - c - 1 \neq 0$.

b) Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Alors les matrices A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, sont linéairement indépendantes

☐ pour toutes valeurs de a, b.

☐ lorsque $a \neq 0$ et pour toutes valeurs de b.

☐ lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 3$.

☐ lorsque $a \neq 0$ et $b = 3$.

c) Dire lequel parmi les énoncés suivants est vrai.

☐ Soit f un vecteur de l'espace vectoriel V des fonctions réelles d'une variable réelle. S'il existe un réel t tel que $f(t) = 0$, alors f est le vecteur nul de V.

☐ Soit f un vecteur de l'espace vectoriel V des fonctions réelles d'une variable réelle. Si f est le vecteur nul de V, alors $f(t) = 0$ pour tout nombre réel t.

☐ Soit p un vecteur de l'espace vectoriel V des polynômes de degré $\leqslant 5$. Si $p(0) = 0$, alors p est le vecteur nul de V.

☐ Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ un vecteur de l'espace vectoriel V des suites réelles. S'il existe un entier n tel que $x_n = 0$, alors $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est le vecteur nul de V.

Sol.:

a) ☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ forme une base de $\mathbb{P}_3$ pour certaines valeurs des paramètres a, b, c. En effet on élimine d'emblée la première réponse puisque t^4 ne peut visiblement pas être obtenu comme combinaison linéaire des polynômes proposés pour des raisons de degré. Pour la suite on se demande si la famille $\{p.q, r, s\}$ est libre. On aimerait donc savoir quelle(s) combinaison(s) linéaire(s) $\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s$ donne le polynôme nul. Tous ses coefficients sont nuls et nous obtenons donc un système de quatre équations :

$$\begin{cases} & & \gamma & & = 0 \\ \alpha & +\beta & & & = 0 \\ \alpha & +2\beta & & +\delta & = 0 \\ \alpha & +a\beta & +b\gamma & +c\delta & = 0 \end{cases}$$

Le nombre de solutions de ce système dépend des valeurs des paramètres. Lorsque $a-1=c$, il y a une infinité de solutions, la famille de polynômes n'est donc pas libre. Mais, dans tous les autres cas, lorsque $a-1 \neq c$, la seule solution est $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ et la famille forme donc une base de $\mathbb{P}_3$.

b) ☐ lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 3$.
Il y a deux manières de résoudre cet exercice. Soit on écrit un système $\alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 + \delta A_4 = 0$, où 0 est la matrice nulle, et on trouve que pour forcer $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ il faut avoir $a \neq 0$ et $b \neq 3$. Soit on considère la base canonique $(e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$ des matrices 2×2 et on écrit chacune des matrices A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, dans cette base (sous forme de vecteurs). On peut ensuite échelonner le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

pour trouver sous quelles valeurs de a et b le système contient 4 pivots.

c) ☐ Soit f un vecteur de l'espace vectoriel V des fonctions réelles d'une variable réelle. Si f est le vecteur nul de V, alors $f(t) = 0$ pour tout nombre réel t.
Les autres affirmations sont toutes incorrectes pour la même raison. Il ne suffit pas de s'annuler en un point pour être le vecteur nul. La fonction nulle est la fonction constamment nulle, le polynôme nul est le polynôme 0, la suite nulle est la suite constamment nulle. Seuls ces vecteurs ont la propriété de ne pas modifier le vecteur auquel on les additionne.

Exercice 12

a) Soit A et B deux matrices inversibles de taille 3×3. On forme la matrice C en multipliant la 3ème ligne de A par 5, puis la 2ème colonne de cette matrice par -3. On définit la matrice $D = C \cdot 2B$. Alors

☐ $\det D = 30 \det A \det B$;

☐ $\det D = -60 \det A \det B$;

☐ $\det D = 90 \det A \det B$;

☐ $\det D = -120 \det A \det B$.

b) Soit A et B deux matrices inversibles de taille 3×3. On obtient la matrice C à partir de A en multipliant par 4 la matrice A, puis en échangeant les lignes 1 et 2. On obtient la matrice D à partir de B en multipliant par 4 la deuxième colonne et en ajoutant 4 fois la première colonne à la troisième.

☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -4 \det A \cdot (\det B)^{-1}$;

☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -\det A \cdot (\det B)^{-1}$;

☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -16 \det A \cdot (\det B)^{-1}$;

☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -\frac{1}{4} \det A \cdot (\det B)^{-1}$.

Sol.:

a) ☐ $\det D = -120 \det A \det B$.
En effet le déterminant de la matrice C est celui de A multiplié par $5 \cdot (-3)$ par linéarité du déterminant comme fonction d'une ligne, puis d'une colonne. La déterminant de la matrice $2B$ vaut $2^3 \det B$ car on multiplie chacune des trois lignes par 2. Il faut ainsi multiplier $\det A \cdot \det B$ par $-15 \cdot 8 = -120$.

b) ☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -16 \det A \cdot (\det B)^{-1}$.
En effet, le déterminant de la matrice C est celui de A multiplié par $4^3 \cdot (-1)$, par linéarité du déterminant par rapport à chacune des lignes et puisque le déterminant change de signe lorsque l'on échange deux lignes. Le déterminant de D vaut 4 fois celui de B, par linéarité du déterminant comme fonction d'une colonne et parce que ajouter tant de fois une colonne à une autre ne change pas le déterminant. De plus, $det(D^{-1}) = \det(D)^{-1}$ et ainsi

$$\det(C \cdot D^{-1}) = \det(C) \cdot \det(D^{-1}) = -4^3 \det(A) \cdot (4 \det(B))^{-1} = -16 \det(A) \cdot (\det(B))^{-1}$$

Exercice 13

Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.: On échelonne la matrice afin de rendre les calculs plus simples. On obtient $\det(A) = 16$. En effet en utilisant L_1 pour échelonner L_2 et L_3 et L_3 pour $L4$ et L_5 (ça fera apparaître le plus rapidement possible des 0)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \ldots \overset{\text{opérations de type 3}}{\sim} \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Puis en utilisant L_2

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{opérations de type 3}} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix} \underset{\sim}{L_5 \leftarrow L_5 - L4} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

En permutant L_2 et L_3 on obtient une matrice triangulaire supérieure, que l'on appelle A'

$$A' = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Le calcul de $det(A)$ sera impacté par la permutation de la manière suivante

$$det(A) = (-1)det(A') = (-1)(1 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = (-1)(-16) = 16$$

<u>Exercices additionnels</u>

Exercice 14

En calculant la forme échelonnée d'une matrice, montrer que le vecteur $\overrightarrow{v}$ est dans le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$:

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}1\\8\\4\\-3\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\4\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix},$$

Sol.: Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est dans l'espace engendré par $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ s'il s'écrit comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs, c'est-à-dire s'il existe x_1 et x_2 tel que

$$x_1\overrightarrow{v}_1 + x_2\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{v}$$

Ceci est vrai si et seulement si le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$ admet au moins une solution, où A est une matrice qui a pour colonnes les vecteurs $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$. La matrice augmentée du système est donc

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 1\\ 4 & 0 & 8\\ -1 & -2 & 4\\ 0 & 1 & -3\end{array}\right)$$

Lorsqu'on échelonne la matrice augmentée, on constate qu'il n'y a pas de pivot dans la dernière colonne : le système est compatible. Donc le vecteur $\overrightarrow{v}$ est dans l'espace engendré par $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$.

Exercice 15

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une base de Ker(A) et de Im(A).

Sol.: On note $A = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$, avec $(\vec{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ colonnes de A. Les vecteurs $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ sont proportionnels à $\vec{v}_1$, donc ils sont superflus pour trouver une base de Im(A). Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_4$ sont linéairement indépendants, ils constituent une base de Im(A).

L'espace Ker(A) est constitué des vecteurs $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tels que $A\vec{x} = \vec{0}$. On a

$$A\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 + x_4\vec{v}_4 = (x_1 + 2x_2 + 3x_3)\vec{v}_1 + x_4\vec{v}_4,$$

ainsi $A\vec{x} = \vec{0}$ ssi $x_4 = 0$ et $x_1 = -2x_2 - 3x_3$. Par conséquent, x_2 et x_3 sont des variables libres du système linéaire $A\vec{x} = \vec{0}$. On obtient une base de Ker(A) en choisissant successivement $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, puis $x_2 = 0$, $x_3 = 1$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 16

Déterminer si les applications linéaires associées aux matrices suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.: La réduction de Gauss-Jordan de la matrice A nous donne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - 3L_1}{\widetilde{L_2 \to L_2 - 2L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - L_2}{\widetilde{L_1 \to L_1 - L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Comme la matrice échelonnée-réduite associée à la matrice A n'a pas un pivot par colonne, le système $A\vec{x} = \vec{0}$ possède une infinité de solutions et l'application linéaire n'est pas injective.
- Comme la matrice échelonnée-réduite associée à la matrice A n'a pas un pivot par ligne, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ n'est pas consistant pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ et l'application linéaire n'est pas surjective.
- Comme l'application linéaire n'est ni injective ni surjective, elle n'est pas bijective.

De la même manière nous avons

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - 2L_1}{\widetilde{L_2 \to L_2 - 2L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_4 \to L_4 - L_2}{\widetilde{L_1 \to L_1 - L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Comme il n'y a pas un pivot par colonne, l'application linéaire n'est pas injective.
- Comme il n'y a pas un pivot par ligne, l'application linéaire n'est pas surjective.
- Comme l'application linéaire n'est ni injective ni surjective, elle n'est pas bijective.

Les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice C nous donnent

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{L_1 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \to L_3 - 3L_1 \\ L_4 \to L_4 - L_1}}{\widetilde{L_2 \to L_2 - 2L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{L_2 \leftrightarrow \tfrac{1}{4} L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \underset{L_4 \to L_4 - 3L_2}{\widetilde{L_3 \to L_3 - L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Comme il n'y a pas un pivot par colonne, l'application linéaire n'est pas injective.
- Comme il y a un pivot par ligne, l'application linéaire est surjective.
- Comme l'application linéaire n'est pas injective, elle n'est pas bijective.