Série 3 (Corrigé)

Cette série suit le chapitre 1 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *Gauss-Jordan, formes E et ER, combinaisons linéaires, span,* $\mathbb{R}^n$*, (in)dépendance linéaire*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de α le vecteur $\overrightarrow{b}$ est-il une combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}_1$ et $\overrightarrow{a}_2$?

Sol.: Considérons le système linéaire $x_1\overrightarrow{a}_1 + x_2\overrightarrow{a}_2 = \overrightarrow{b}$. En coordonnées, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{rrcr} x_1 & -3x_2 & = & \alpha \\ & x_2 & = & -5 \\ -2x_1 & +8x_2 & = & -3 \end{array}\right.$$

avec la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & \alpha \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Après des opérations élémentaires sur les lignes, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -15+\alpha \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7+2\alpha \end{pmatrix}.$$

On voit que le système est compatible si et seulement si $7 + 2\alpha = 0$, i.e. $\alpha = -\frac{7}{2}$. Dans ce cas, la matrice ci-dessus est la forme échelonnée réduite.
(Remarque : Lorsque $7 + 2\alpha \neq 0$, le système est incompatible, et la forme échelonnée réduite est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad)$$

En résumé, le vecteur $\overrightarrow{b}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}_1$ et $\overrightarrow{a}_2$ si et seulement si $\alpha = -\frac{7}{2}$.

Exercice 2

Considérons le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 8x_3 & = & 7 \\ -3x_1 & - & 7x_2 & + & 9x_3 & = & -6. \end{array}\right.$$

a) Écrire le système sous forme matricielle $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

b) Écrire le système comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A.

c) Trouver la solution de l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

d) Subsidiaire : écrire l'ensemble des solutions en fonction d'un paramètre.

Sol.:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -8 \\ -3 & -7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

b)

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

c) La matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -8 & 7 \\ -3 & -7 & 9 & -6 \end{pmatrix},$$

et la forme échelonnée réduite est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La variable x_3 est libre, on peut donc écrire l'ensemble des solutions comme

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 & = -5 - 4x_3 \\ x_2 & = 3 + 3x_3 \\ x_3 & \text{libre} \end{array}\right.$$

d) En posant $x_3 = t \in \mathbb{R}$, on en déduit que les solutions (s_1, s_2, s_3) sont données par

$$s_3 = t,\ t \in \mathbb{R},\ s_1 = -5 - 4t,\ s_2 = 3 + 3t.$$

On en déduit l'ensemble des solutions :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 3

Calculer $A(\alpha_1 \overrightarrow{v}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{v}_2)$, où

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3;$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1.$$

Sol.:

a)

$$A(\alpha_1 \overrightarrow{v}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{v}_2) = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

b)

$$A(\alpha_1 \overrightarrow{v}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{v}_2) = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Écrire les solutions des systèmes $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ suivants sous la forme $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{p} + \overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{p}$ est une solution particulière du système, et $\overrightarrow{v}$ est la solution générale du système homogène $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 14 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 19 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

Sol.:

a) Forme échelonnée réduite de la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution générale :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Forme échelonnée réduite de la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système est incompatible. Pas de solution !

Exercice 5

a) Soient les vecteurs

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}.$$

i) Pour quelle(s) valeur(s) de h le vecteur $\overrightarrow{w}$ peut-il être obtenu comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$?

ii) Dans ce cas quels sont les coefficients respectifs a_1, a_2 des vecteurs $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$?

b) Le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$, se trouve-t-il dans le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les colonnes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$

Justifiez votre réponse.

Sol.:

a) Tout élément de l'espace engendré par $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$ est de la forme

$$a_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\overrightarrow{v}_2 = a_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

où a_1 et a_2 sont des reéls. Le vecteur $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}$ est engendré par $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$ si et seulement il existe des réels, a_1 et a_2 tels que l'équation vectorielle suivante soit satisfaite :

$$a_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}$$

Sous forme matricielle on effectue des opérations en essayant de ne pas traîner des fractions :

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & h \end{pmatrix} \sim_{L_1 \leftrightarrow L_2 \cdot 1/2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & h \end{pmatrix} \sim^{L_2 - 2L_1}_{L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & h-5 \end{pmatrix} \sim_{L_3 - 2L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & h+9 \end{pmatrix} \sim_{(L_1-L_2)\cdot 1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & h+9 \end{pmatrix}$$

D'où $h = -9$ pour satisfaire le théorème 2 avec $a_1 = 6$, $a_2 = -7$.

b) Pour voir si le vecteur $\overrightarrow{v}$ est dans le plan engendré par les colonnes de A, on construit une nouvelle matrice $B = [A \quad \overrightarrow{v}]$, alors la forme échelonnée réduite de B montre que

$$\overrightarrow{v} = -5 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

et donc $\overrightarrow{v}$ est bien dans ce plan.

Exercice 6

Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Montrer que l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ n'est pas compatible pour tout vecteur $\overrightarrow{b}$ de $\mathbb{R}^2$. Trouver et décrire l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{b}$ pour lesquels $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ est compatible.

Sol.: Puisque la deuxième ligne de la matrice A vaut -2 fois la première, il faut et il suffit que le deuxième coefficient de $\overrightarrow{b}$ vérifie aussi cette propriété : $b_2 = -2b_1$. Ainsi pour $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ le système n'a pas de solution.

Exercice 7

Pour les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donner cinq vecteurs qui appartiennent à $\text{span}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$. Pour chaque vecteur, donner les coefficients de la combinaison linéaire.

Sol.: On cherche des vecteurs $\overrightarrow{b} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2}$.

- pour $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$: $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$.
- pour $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$: $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- pour $\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = 0$: $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.
- pour $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$: $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- pour $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$: $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -15 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

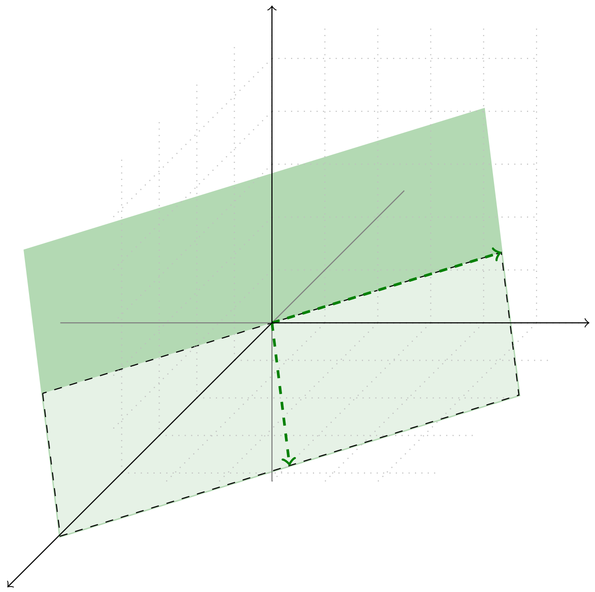
Exercice 8

Soient $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Donner une interprétation géométrique de span$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$.

b) Est-ce que $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est dans le span$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$?

Sol.: Il s'agit d'un plan incliné passant par l'origine.



Le vecteur $\overrightarrow{b}$ n'en fait par partie. Soit on se convainc par le graphe, soit on essaie de trouver les coefficients λ_1, λ_2 tels que $\overrightarrow{b} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2}$. On obtient une ligne du type $(0 \cdots 0|*)$ et le système est incompatible.

Exercice 9

Soit span$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\}$ avec

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Laquelles des informations suivantes est correcte ?

☐ Le span ne contient aucun vecteur de $\mathbb{R}^4$.

☐ Le span contient tous les vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

☐ Le vecteur $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est dans le span.

☐ Le span contient une infinité de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Sol.: Comme la troisième composante des quatre vecteurs est nulle, tous les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} * \\ * \\ a \\ * \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$, ne seront pas dans le span. Donc le span ne peut pas contenir le vecteur $\overrightarrow{b}$ ainsi que tous les vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Comme $\overrightarrow{v_1}$ (ou $\overrightarrow{v_2}$, ...) est dans le span, le span contient un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Vu qu'il contient au moins un vecteurs de $\mathbb{R}^4$, il contient toutes les combinaisons linéaires de celui-ci, et donc une infinité de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Remarque : le span de n'importe quelle liste de vecteurs non-nuls contient toujours une infinité de vecteurs.

Exercice 10

Soit span$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ avec

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Laquelles des informations suivantes est correcte ?

☐ span$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\} = \mathbb{R}^3$.

☐ Le span$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ est une droite.

☐ Le span$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ est un plan.

☐ Le span$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ ne contient que $\overrightarrow{0}$.

Sol.: Le span correspond au plan contenant les points de coordonnées $(x, y, 0)$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Il ne peut pas être égal à $\mathbb{R}^3$ car il manque la troisième composante dans $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$.

Exercice 11

Donner une matrice A de taille 3×3 à coefficients non-nuls (tous !) et un vecteur $\overrightarrow{b}$ de $\mathbb{R}^3$, tels que $\overrightarrow{b}$ n'appartienne pas à span$\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}\}$ où $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ sont les colonnes de A.

Sol.: Il faut que $\overrightarrow{b}$ ne puisse pas s'écrire comme combinaison linéaire des colonnes de A. On peut par exemple prendre $\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{a_3}$, on aura alors que le span$\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}\}$ est une droite de $\mathbb{R}^3$. On choisit alors un vecteur $\overrightarrow{b}$ qui n'est pas sur la droite de direction $\overrightarrow{a_1}$. Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi prendre $\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{a_2}$ et $\overrightarrow{a_3}$ différent. Dans ce cas le span est un plan. On construit un vecteur $\overrightarrow{b}$ qui n'est pas sur ce plan.

<u>**Exercices additionnels**</u>

Exercice 12

Pour chacun des systèmes suivants :

i) Écrire la matrice augmentée.

ii) Transformer la matrice augmentée sous forme échelonnée réduite.

iii) Identifier les variables de bases et les variables libres, et écrire la solution générale.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 8 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & = & 6 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrrrcr} x_1 & + & 2x_2 & & & = & 1 \\ & & & x_3 & & = & 2 \\ & & & & x_4 & = & -1 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \end{array}\right.$

Sol.:

a) Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Variables de bases : x_1 et x_2. Pas de variable libre. Solution générale :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 3 \\ x_2 & = & 2 \end{array}\right.$$

b) Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Variables de bases : x_1, x_2, x_3. Pas de variable libre. Solution générale :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & -1 \\ x_2 & = & 1 \\ x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

c) Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Déjà sous forme échelonnée réduite. Variables de bases : x_1, x_3, x_4. Variable libre : x_2. Solution générale :

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 - 2x_2 \\ x_3 & = & 2 \\ x_4 & = & -1 \end{cases}$$

d) Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pas de solution. Théoriquement, variable de base : x_1, variables libres : x_2, x_3.

e) Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Variables de bases : x_1, x_4, x_5. Variables libres : x_2, x_3. Solution générale :

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 - x_2 - x_3 \\ x_4 & = & 2 \\ x_5 & = & -1 \end{cases}$$

Exercice 13

Déterminer les valeurs du nombre réel a pour lesquelles le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ \quad y + az = 2 \\ (a^2 - 4)z = a - 2 \end{cases}$$

possède des solutions. Déterminer ces solutions.

Sol.: La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & (a^2-4) & a-2 \end{array}\right)$$

1. Si $a = 2$, alors la dernière ligne est $(0\ 0\ 0\ |\ 0)$ et il y'a une infinité de solutions. En effet
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
et les solutions sont données par $s = (0, 2 - 2z, z)$, avec $z \in \mathbb{R}$.
2. Si $a = -2$ alors la dernière ligne est $(0\ 0\ 0\ |\ -4)$ et il n'y a pas de solutions.
3. Si $a \neq \pm 2$ alors la dernière ligne devient $(0\ \ 0\ \ a+2\ |1)$ et la forme échelonnée de la matrice est
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & a+2 & 1 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a-2}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a+4}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{array}\right)$$
Il y'a une unique solution donnée par
$$\begin{cases} x = \frac{a-2}{a+2} \\ y = \frac{a+4}{a+2} \\ z = \frac{1}{a+2} \end{cases}$$