Série 1 (Corrigé)

Cette série suit le chapitre 1.1 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *équation linéaire, systèmes d'équations linéaires, solutions*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Parmi les équations suivantes, déterminer celles qui sont linéaires.

a) $x_1^2 + x_2^2 = 1$

b) $2^2 x_1 + 2^2 x_2 = 1$

c) $\sqrt{3}x_1 + \left(1 - \sqrt{2}\right) x_2 + 3 = \pi x_1$

d) $3x_1 + 2x_2 + 4\, x_3\, x_4 = 5$

e) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) x_1 - 2 = 2x_1 + 4x_2 + \sqrt{3}\, x_3 + x_9$

Sol.:

a) non (x_1^2 et x_2^2 sont non-linéaires)

b) oui

c) oui

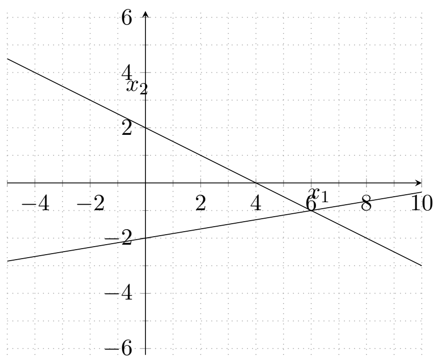
d) non ($x_3\, x_4$ est non-linéaire)

e) oui

Exercice 2

Soient les deux droites d'équations respectives $\dfrac{1}{2}x_1 - 3x_2 = 6$ et $x_1 + 2x_2 = 4$. Représenter graphiquement les deux équations dans un systèmes d'axes x_1 et x_2 et déterminer le point d'intersection de ces deux droites

Sol.: Le point d'intersection est $(6; -1)$.



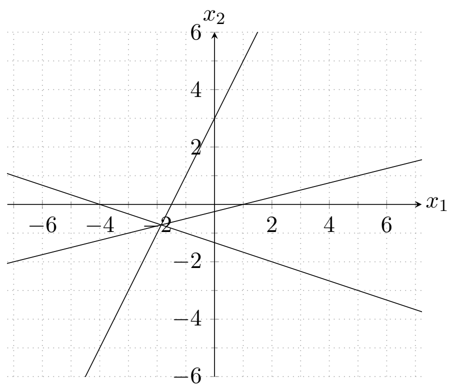
Exercice 3

a) Soient les trois droites $x_1 - 4x_2 = 1$, $2x_1 - x_2 = -3$ et $-x_1 - 3x_2 = 4$. Représenter les droites dans le plan $\mathbb{R}^2$. Ont-elles des points communs ?

b) Soient les trois plans $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$, $x_2 - x_3 = 1$ et $x_1 + 3x_2 = 0$. Est-ce qu'ils ont des points communs ?

Sol.:

a) En représentant les droites, on voit qu'elles s'intersectent en un point commun. On peut le calculer en isolant x_2 de chaque équation et en égalisant deux équations (comme on sait qu'il y a une intersection, on peut se permettre de n'utiliser que deux équations, sinon nous devions utiliser l'autre couple de droite). On a $x_2 = \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}$, $x_2 = 2x_1 + 3$ et $x_2 = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}$. En prenant les deux premières on obtient $x_1 = -\frac{13}{7}$, et en substituant, on obtient $x_2 = -\frac{5}{7}$. On peut vérifier que $(-\frac{13}{7}, -\frac{5}{7})$ est bien un point qui appartient à chacune des droites, en remplaçant x_1 et x_2 par les valeurs dans chacune des trois droites. Une autre solution est d'écrire les trois droites dans un système d'équations linéaires et d'échelonner.



b) Les trois plans ne s'intersectent pas. On peut le voir en substituant x_1 et x_3 dans l'équation du premier plan. En effet, de $x_1+3x_2 = 0$ et $x_2-x_3 = 1$, on obtient $x_1 = -3x_2$ et$x_3 = x_2-1$ respectivement. En remplaçant dans l'équation du premier plan on obtient $-1 = 4$ ce qui ne fait pas de sens, donc le système n'a pas de solution.

Exercice 4

Considérons l'équation suivante

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = 1.$$

a) Dessiner la solution avec les paramètres $\alpha = 1$, $\beta = 3$.

b) Pour quelles valeurs de α, β la droite $\alpha x_1 + \beta x_2 = 1$ est-elle parallèle à la droite $-x_1 + x_2 = -1$?

c) Trouver les valeurs de α, β (si elles existent) telles que le système

$$\begin{cases} -x_1 & + & x_2 & = & -1 \\ \alpha x_1 & + & \beta x_2 & = & 1 \\ (\alpha - 1)\, x_1 & + & (\beta + 1)\, x_2 & = & 0 \end{cases}$$

i) possède une infinité de solutions ;

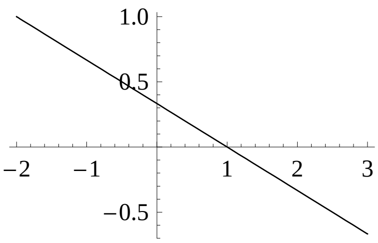
ii) ne possède aucune solution ;

iii) possède une solution unique.

Sol.:

a)

$$x_2 = \frac{1}{3}(1 - x_1)$$



b) Les droites sont parallèles lorsque les vecteurs normaux aux droites $(\alpha,\, \beta)$ et $(-1,\, 1)$ sont proportionnels i.e. $-\alpha = \beta$, avec $(\alpha,\, \beta) \neq 0$ (pour que la droite existe).

c) Méthode 1 : On constate que l'équation 1 + l'équation 2 nous donne l'équation 3. Ainsi cette denière ne nous donne pas de nouvelles informations. On a alors le système

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 & = -1 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 & = 1 \end{cases}$$

On peut mutliplier l'équation par α (en supposant que $\alpha \neq 0$)on obtient

$$\begin{cases} -\alpha x_1 + \alpha x_2 & = -\alpha \\ \alpha x_1 + \beta x_2 & = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Puis ensuite on raisonne avec les deux droites. Méthode 2 (similaire à la 1)On regarde la pente et la hauteur des deux droites.

$$\text{Equation 1 } m = 1, h = -1 \quad \text{Equation 2} \quad m = \frac{-\alpha}{\beta}, h = \frac{1}{\beta}$$

Si les deux droites sont parallèles, on obtient aucune solution : c'est le cas lorsque les pentes sont les mêmes et la hauteur différente. On a cela quand $\beta + \alpha = 0$ et $\beta \neq -1$ (ou $-\alpha + 1 \neq 0$). Si les deux droites sont les mêmes, on obtient une infinité de solutions : c'est le cas quand les pentes et les hauteurs sont les mêmes. On a cela quand $\beta + \alpha = 0$ et $\beta = -1$ (c'est à dire $\alpha = 1$ et $\beta = -1$). Si les deux droites s'intersectent on aura une unique solution. Pour cela on cherche un point sur le deux droites, on sait aussi que $\alpha + \beta \neq 0$. Si on additionne les deux droires du système (1) on obtient $(\alpha + \beta)x_2 = 1 - \alpha$, et on obtient

$$x_2 = \frac{1-\alpha}{\alpha+\beta}$$

Comme $\alpha + \beta \neq 0$ on aura une unique solution (on trouvera $x_1$en substituant la valeur de x_2 dans l'équation 1).
Méthode 3(avec l'algo de Gauss-Jordan) : En faisant $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 + \alpha L_1$, on obtient la forme échelonnée de la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & \alpha+\beta & -\alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\alpha + \beta \neq 0$, le système linéaire possède une unique solution. Si $\alpha + \beta = 0$, le système est dit dégénéré. On a alors deux cas possibles : si $-\alpha + 1 \neq 0$ le système ne possède aucune solution (système incompatible) ; si $-\alpha + 1 = 0$ (i.e. $\alpha = 1, \beta = -1$) alors x_2 est une variable libre et il existe une infinité de solutions.

Exercice 5

Remplisser les informations manquantes pour chaque système ci-dessous.

a) $m =$ ___ équations et $n =$ ___ variables

$$\begin{cases} 3x_1 + \quad 4x_3 &= 5 \\ \qquad x_2 &= 2 \end{cases} \quad \text{avec coefficients} \quad \begin{matrix} a_{11} = \_\_\_, & a_{12} = \_\_\_, & a_{13} = \_\_\_ \\ a_{21} = \_\_\_, & a_{22} = \_\_\_, & a_{23} = \_\_\_ \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} b_1 = \_\_\_ \\ b_2 = \_\_\_ \end{matrix}$$

Vérifier que $(-2, 2, \frac{11}{4})$ est une solution du système linéaire. Est- ce que $(-2, 1, \frac{11}{4})$ est une solution du système linéaire ?

b) $m =$ ___ équations et $n =$ ___ variables

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 &= -\frac{1}{2} \\ 2x_1 - x_2 &= -5 \end{cases} \quad \text{avec coefficients} \quad \begin{matrix} a_{11} = \_\_\_, & a_{12} = \_\_\_ \\ a_{21} = \_\_\_, & a_{22} = \_\_\_ \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} b_1 = \_\_\_ \\ b_2 = \_\_\_ \end{matrix}$$

Donner la/les solution(s) du système si elles existent.

c) $m =$ ___ équations et $n =$ ___ variables

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{cases} \quad \text{avec coefficients} \quad \begin{matrix} a_{11} = \_\_\_, & a_{12} = \_\_\_ \\ a_{21} = \_\_\_, & a_{22} = \_\_\_ \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} b_1 = \_\_\_ \\ b_2 = \_\_\_ \end{matrix}$$

Vérifier que $(2, 1)$ est une solution du système linéaire. Donner la/les solution(s) du système s'il y'en a d'autres.

d) $m =$ ___ équations et $n =$ ___ variables

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + \frac{1}{3}x_2 &= \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{avec coefficients} \quad \begin{matrix} a_{11} = \_\_\_, & a_{12} = \_\_\_ \\ a_{21} = \_\_\_, & a_{22} = \_\_\_ \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} b_1 = \_\_\_ \\ b_2 = \_\_\_ \end{matrix}$$

Donner la/les solution(s) du système si elles existent.

Sol.:

a) Non ce n'est pas une solution.
b) il n'y a pas de solutions.
c) Il n'y a qu'une solution.
d) Ce système a une infinité de solutions.

Exercice 6

On considère l'équation $ax + by = 2$.

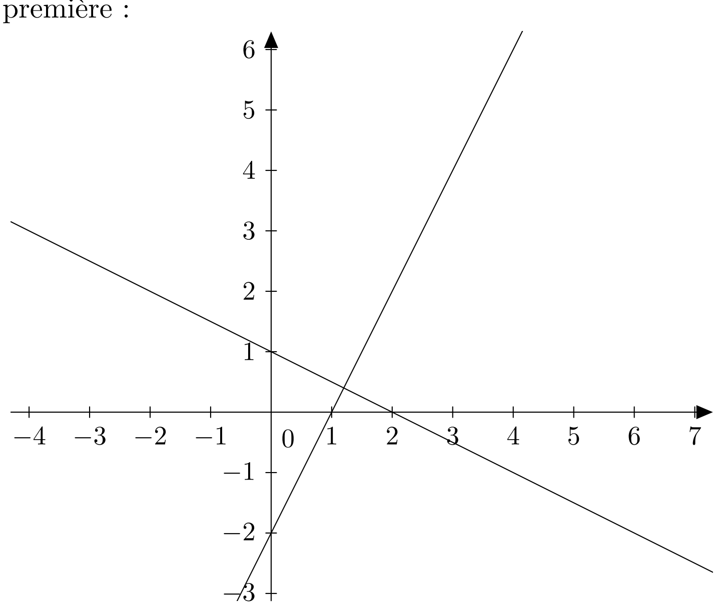
a) Représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ les solutions lorsque $a = 2$ et $b = -1$.
b) Même question pour $a = 1$ et $b = 2$.
c) Estimer géométriquement la solution du système

$$\begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

sur l'illustration des points a) et b), puis résoudre le système.

Sol.: On considère l'équation $ax + by = 2$.

a) L'équation $2x - y = 2$ est équivalente à $y = 2x - 2$. Il s'agit donc d'une droite de pente 2 et d'ordonnée à l'origine -2.
b) Ici la pente est $-1/2$ et l'ordonnée à l'origine vaut 1. Cette droite est perpendiculaire à la première :



c) On voit que les droites se coupent lorsque x est un peu plus grand que 1. Résolvons donc le système pour nous en assurer :

$$\begin{array}{ll} 2x - y &= 2 \\ x + 2y &= 2 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad L_1 - 2L_2 \qquad \begin{array}{l} -5y = -2 \\ x + 2y = 2 \end{array}$$

Ainsi $y = \dfrac{2}{5}$ et en remplaçant dans la deuxième équation on trouve $x = 2 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{6}{5}$.

Exercice 7

Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 &= 1 \end{cases}$$

a) Est-ce que le système est compatible ?
b) Donner un'interprétation géométrique du résultat.

Sol.:

a) En utilisant des opérations sur les équations, on voit que le système est incompatible. Autre méthode : Le système a pour matrice augmentée

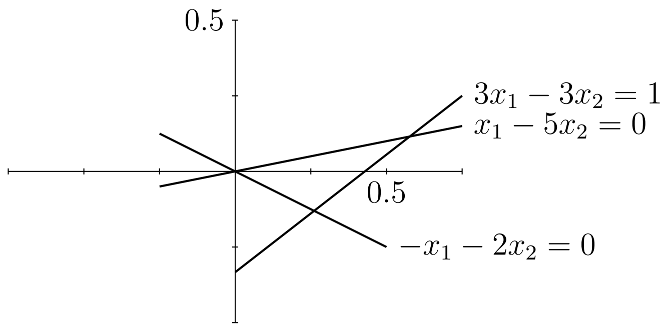
$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

et pour forme échelonnée réduite

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut voir que ce système ne possède pas de solution.

b) Si on dessine les trois droites sur le plan, on peut voir qu'elles ne se rencontrent pas en un seul point.



Exercice 8

Trouver le polynôme de degré 2 de la forme $f(t) = at^2 + bt + c$ dont le graphe passe par les points $(1, -1)$, $(2, 3)$ et $(3, 13)$. Esquisser le graphe de ce polynôme.

Sol.: Comme le graphe du polynôme $f(t) = at^2 + bt + c$ passe par les points $(1, -1)$, $(2, 3)$ et $(3, 13)$, nous trouvons le système

$$\begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 13 \end{cases}$$

En utilisant soit la substitution, soit des opérations sur les équations, on arrive à obtenir que $a = 3\,,\quad b = -5\,,\quad \text{et}\quad c = 1$

Autre méthode : La réduction de Gauss–Jordan de la matrice augmentée du système nous donne

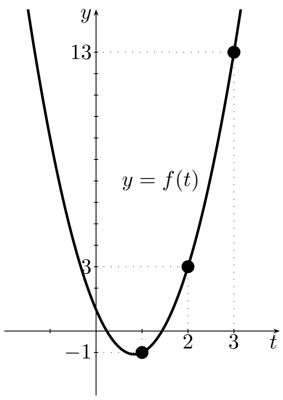
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 1 & 13 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Par conséquent,

$$a = 3\,,\quad b = -5\,,\quad \text{et}\quad c = 1$$

et le polynôme cherché est

$$f(t) = 3t^2 - 5t + 1\,.$$



Exercice 9

Déterminer les matrices associées aux applications linéaires suivantes et calculer ensuite l'image d'un vecteur quelconque (x, y) :

a) rotation ρ d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans le sens positif,

b) symétrie σ par rapport à la droite $y = -x$.

Sol.: a) La rotation ρ d'angle $\frac{\pi}{4}$ est telle que

$$\begin{cases} \rho(1,0) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ \rho(0,1) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \end{cases} \implies M_\rho = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme

$$M_\rho \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix},$$

l'image par ρ d'un vecteur quelconque (x, y) est

$$\rho(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y\,,\,x+y)\,.$$

b) La symétrie σ par rapport à la droite $y = -x$ envoie le vecteur $(1, 0)$ sur le vecteur $(0, -1)$ et le vecteur $(0, 1)$ sur le vecteur $(-1, 0)$.

Nous avons donc :

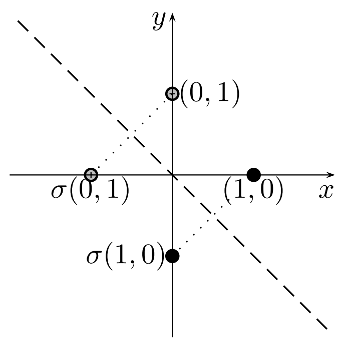
$$\begin{cases} \sigma(1,0) = (0,-1) \\ \sigma(0,1) = (-1,0) \end{cases} \implies M_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

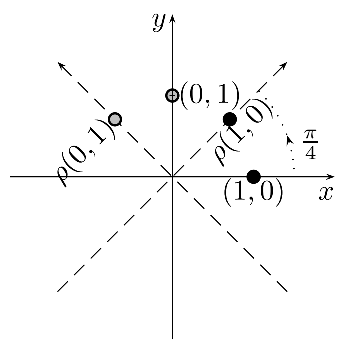
Comme

$$M_\sigma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix},$$

l'image par σ d'un vecteur quelconque (x, y) est

$$\sigma(x,y) = (-y, -x)\,.$$





Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Toutes les opérations élémentaires sur les lignes sont réversibles.	☐	☐
b) Une matrice de taille 5×6 a 6 lignes.	☐	☐
c) L'ensemble des solutions d'un système linéaire dans les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est une liste de nombres $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ qui, substitués à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivement, rendent correcte chaque équation du système.	☐	☐
d) L'existence et l'unicité d'une solution sont deux questions fondamentales pour un système linéaire.	☐	☐

Sol.:

a) Vrai, en effet échanger deux lignes est une opération réversible (il suffit d'échanger de nouveau les mêmes lignes) ; multiplier une ligne par un nombre non-nul est une opération réversible (il suffit de multiplier la même ligne par l'inverse de ce nombre) et ajouter à une ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j est une opération réversible car il suffit d'enlever à L_i le même multiple de L_j.

b) Faux. Par convention, une matrice de taille $n \times m$ possède n lignes et m colonnes.

c) Vrai, c'est la définition de l'ensemble des solutions d'une système linéaire à n variables : chaque équation doit être satisfaite par $(s_1, \ldots, s_n)$.

d) Vrai. En général, c'est la structure/description de l'ensemble des solutions d'un système linéaire qui est cruciale pour la compréhension de celui-ci.

Exercice 11

Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 18 \\ x + 2y + z = 13 \\ x + y \phantom{{}+2z} = 5 \end{cases}$$

possède une solution unique telle que

☐ $z = 2$

☐ $z = 3$

☐ $z = 4$

☐ $z = 5$

Sol.: $z = 5$