

Chapitre 0 : Quelques rappels et notions importantes

Objectifs. Le but de ce chapitre 0 est de fournir un rappel sur des notions de la scolarité obligatoire.

0.1 Ensembles de nombres et notations

Nombres naturels (entiers positifs)	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
Nombres entiers relatifs	$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
Nombres rationnels (fractions)	$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$
Nombres réels	\mathbb{R}
Nombres complexes	$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}, i^2 = -1$

Quelques notations :

\in	appartient à	$2 \in \mathbb{N}, \pi \in \mathbb{R}$
\notin	n'appartient pas à	$-2 \notin \mathbb{N}, \pi \notin \mathbb{Q}$
\subset	est inclu dans	$\{2\} \subset \mathbb{N}, \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
\exists	il existe	$\exists x \in \mathbb{R}$ tel que ...
\forall	pour tout	$\forall x \in \mathbb{R}$ on a ...

On rappelle que

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Remarque: On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Définition 1 (ensemble).

Un ensemble est formé d'éléments. On le note, par exemple, $E = \{a, b, c, \dots\}$.

Pour dire qu'un élément x appartient à E , on utilise $x \in E$.

Pour dire qu'un sous-ensemble A est inclu dans E (est un sous-ensemble de E), on utilise $A \subset E$.

Définition 2 (union et intersection).

Soient E un ensemble et A et B sous-ensembles de E ($A \subset E$ et $B \subset E$). On définit

1. l'intersection $A \cap B$ par

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

2. l'union $A \cup B$ par

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Équations à une inconnue dans \mathbb{R}

Exemple :

$$x^2 - 1 = x + 1$$

est une **équation** dans \mathbb{R} , formée du membre de gauche $g(x) = x^2 - 1$ et du membre de droite $d(x) = x + 1$.

x est l'**inconnue** (ou *variable*).

On appelle **solution** de $g(x) = d(x)$ dans \mathbb{R} tout nombre réel qui, substitué à x , fait de l'équation une égalité vraie.

Dans l'exemple, 2 est solution de l'équation, mais 1 n'est pas solution de l'équation.

L'ensemble de toutes les solutions de l'équation se note généralement S . Ici, on a

$$S = \{-1; 2\}.$$

Résoudre une équation consiste à déterminer l'ensemble des solutions S .

Méthode de résolution algébrique

On effectue des opérations algébriques pour remplacer l'équation par une **équation équivalente** (qui a les mêmes solutions) de forme plus simple :

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= x + 1 \\ \iff x^2 - x - 2 &= 0 \\ \iff (x - 2)(x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

d'où $S = \{-1; 2\}$.

Attention : Les *opérations successives* suivantes

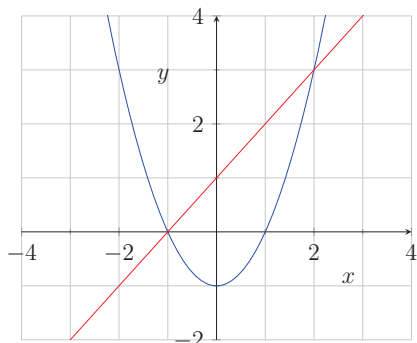
$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= x + 1 \\ (x - 1)(x + 1) &= x + 1 \\ x - 1 &= 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

ne donnent pas lieu à des équations équivalentes ! Que se passe-t-il avec $x = -1$?

Méthode de résolution graphique

On représente dans un même système d'axes le graphe des fonctions associées au membre de gauche $g(x)$ et au membre de droite $d(x)$ et on détermine leurs points d'intersection.

Dans le cas de notre exemple, le graphe de $g(x) = x^2 - 1$ (fonction quadratique) est une parabole de sommet $(0; -1)$ et celui de $d(x) = x + 1$ (fonction affine) une droite de pente 1 et d'ordonnée à l'origine égale à 1. Les deux graphes s'intersectent aux points $(-1; 0)$ et $(2; 3)$, d'où l'on tire les solutions de l'équation : $S = \{-1; 2\}$



Une équation de la forme $ax = b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ est dite *équation linéaire à une inconnue* dans \mathbb{R} .

Équations linéaires à deux inconnues dans \mathbb{R}

Une équation linéaire à deux inconnues dans \mathbb{R} est une équation qui peut s'écrire sous la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$

avec $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$. Si $a_2 \neq 0$, l'équation est équivalente à

$$x_2 = -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}$$

qui représente une droite dans le plan de pente donnée par $-\frac{a_1}{a_2}$ et d'ordonnée à l'origine égale à $\frac{b}{a_2}$. Lorsque $a_1 = 0$, la droite est horizontale (de pente nulle).

On note la pente

$$m = -\frac{a_1}{a_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$

