

# Algèbre linéaire

## Examen

### Partie commune

### Automne 2024

---

## Énoncé

---

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- 1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 point si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- 1 point si la réponse est incorrecte.

## Notations

- Pour une matrice  $A$ ,  $a_{ij}$  désigne l'élément situé sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de la matrice.
- Pour un vecteur  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_i$  désigne la  $i$ -ème composante de  $\vec{x}$ .
- $I_m$  désigne la matrice identité de taille  $m \times m$ .
- $\mathbb{P}_n$  désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .
- $M_{m,n}(\mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des matrices de taille  $m \times n$  à coefficients réels.
- Pour  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ , le produit scalaire euclidien est défini par  $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ .
- Pour  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , la norme euclidienne est définie par  $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ .

## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondant à la réponse correcte. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

**Question 1 :** La droite qui approxime le mieux au sens des moindres carrés les points  $(0, 2)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(5, 0)$  est

$y = \frac{11}{5} + \frac{3}{5}x$         $y = 2 - \frac{3}{8}x$         $y = \frac{9}{2} - \frac{5}{2}x$         $y = \frac{12}{7} - \frac{5}{14}x$

**Question 2 :** Soit  $T: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2$  l'application linéaire définie par

$$T \left( \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right) = b_{12} - (b_{11} + b_{22})t + b_{21}t^2.$$

Soient

$$\mathcal{B} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = (1, 1 + t^2, t + t^2)$$

des bases ordonnées de  $M_{2,2}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{P}_2$  respectivement. La matrice  $A$  associée à  $T$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$  de  $M_{2,2}(\mathbb{R})$  et la base  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{P}_2$ , telle que  $[T(B)]_{\mathcal{C}} = A[B]_{\mathcal{B}}$  pour tout  $B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ , satisfait

$a_{12} = -6$         $a_{12} = 3$         $a_{12} = 2$         $a_{12} = -4$

**Question 3 :** Soit  $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$  une base ordonnée de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$  la base ordonnée de  $\mathbb{R}^3$  formée des vecteurs

$$\vec{c}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2, \quad \vec{c}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_3 \quad \text{et} \quad \vec{c}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3.$$

Soit  $P$  la matrice de changement de base telle que  $[\vec{v}]_{\mathcal{C}} = P[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$  pour tout  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ . Alors

$p_{23} = 1$         $p_{23} = 2$         $p_{23} = -\frac{2}{3}$         $p_{23} = 0$

**Question 4 :** Soit

$$A = \begin{bmatrix} \pi & 1 & 3 & 1 \\ 2\pi & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Alors l'inverse  $B = A^{-1}$  de la matrice  $A$  est tel que

$b_{24} = 3$         $b_{21} = 7$         $b_{23} = 5$         $b_{22} = 1$

**Question 5:** Soit  $a$  un nombre réel. Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} ax_1 & + & x_3 & = & 1 \\ & ax_2 & & + & x_4 = 0 \\ x_1 & & + & ax_3 & = 1 \\ & x_2 & & + & ax_4 = 1 \\ x_1 & & + & x_3 & = a \end{cases}$$

possède exactement une solution si et seulement si

$a \in \{-2, 1\}$

$a = -2$

$a \in \{-1, 1\}$

$a \in \{-1, 1, -2\}$

**Question 6:** Soit  $A$  une matrice de taille  $2 \times 2$  telle que  $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  et  $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  sont des vecteurs propres

associés aux valeurs propres  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = 2$  respectivement. Alors la matrice inverse  $A^{-1}$  est

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5/2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -18 & -11 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5/2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

**Question 7:** Soit  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$  et soit  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - y - 5z \\ -2x + y + 7z \\ x - 2z \end{bmatrix}.$$

Alors

le vecteur  $\vec{v}$  n'est ni dans  $\text{Ker}(T)$ , ni dans  $\text{Im}(T)$

le vecteur  $\vec{v}$  est dans  $\text{Ker}(T)$ , mais pas dans  $\text{Im}(T)$

le vecteur  $\vec{v}$  est dans  $\text{Im}(T)$  et dans  $\text{Ker}(T)$

le vecteur  $\vec{v}$  est dans  $\text{Im}(T)$ , mais pas dans  $\text{Ker}(T)$

**Question 8:** Soient

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

trois vecteurs de  $\mathbb{R}^5$  et soit  $W = \text{Vect}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ . L'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à  $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$  fournit une base orthogonale  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  de  $W$  telle que

$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

**Question 9 :** Les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

sont

- $-2, -1$  et  $2$         $-1$  et  $2$         $-1, 1$  et  $2$         $-2, -1$  et  $1$

**Question 10 :** Soit  $W$  l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille  $2 \times 2$ . La deuxième coordonnée

de la matrice  $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in W$  dans la base ordonnée  $\left( \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right)$  de  $W$  est

- $-\frac{3}{4}$         $\frac{1}{4}$         $-2$         $1$

**Question 11 :** Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

possède une solution unique telle que

- $x_4 = 1$         $x_4 = \frac{1}{2}$         $x_4 = -2$         $x_4 = -\frac{5}{2}$

**Question 12 :** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $B \in M_{4,4}(\mathbb{R})$  définie par

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors

- $\det(B) = \alpha^2(\alpha - 1)^2$         $\det(B) = \alpha(\alpha + 2)(\alpha - 1)^2$   
  $\det(B) = \alpha^2(\alpha^2 - 4)$         $\det(B) = \alpha(\alpha + 1)(\alpha^2 - 4)$

**Question 13 :** Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Alors une solution au sens des moindres carrés  $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$  de l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  satisfait

- $\hat{x}_1 = -2$         $\hat{x}_1 = 2$         $\hat{x}_1 = -1$         $\hat{x}_1 = 1$

**Question 14 :** Soit  $W$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  défini par

$$W = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \}.$$

Soit  $\mathcal{B} = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$  une base de  $W$ . Alors la projection orthogonale de  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  sur  $W$  est

- $\begin{bmatrix} 3/2 \\ 4 \\ 6 \\ 7/2 \end{bmatrix}$         $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 3 \\ -1/2 \end{bmatrix}$         $\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$         $\begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{bmatrix}$



## Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

**Question 15:** L'ensemble

$$\{p \in \mathbb{P}_n \mid p(1)p(2) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{P}_n$ .

VRAI       FAUX

**Question 16:** Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$  sont des vecteurs tels que leurs projections orthogonales sur le sous-espace  $W$  sont égales, alors le vecteur  $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$  est orthogonal à  $W$ .

VRAI       FAUX

**Question 17:** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de taille  $3 \times 3$ . Si  $\det(A) = 2$ , alors

$$\det(BA^{-1}B) = \frac{1}{2} \det(B)^2.$$

VRAI       FAUX

**Question 18:** Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels et soient  $T, S: V \rightarrow W$  deux applications linéaires. Si  $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(S)$ , alors  $\text{Im}(T) = \text{Im}(S)$ .

VRAI       FAUX

**Question 19:** Si  $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  est telle que  $\det(A) = 0$ , alors  $\lambda = 0$  est une valeur propre de  $A$ .

VRAI       FAUX

**Question 20:** Si  $A$  est une matrice de taille  $m \times n$  telle que  $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^m$ , alors pour tout choix de  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ , le système  $A\vec{x} = \vec{b}$  possède une solution unique.

VRAI       FAUX

**Question 21:** Soit  $V$  un espace vectoriel et soit  $T: V \rightarrow \mathbb{R}$  une application linéaire. Si  $v_1, v_2, v_3 \in V$  sont tels que

$$T(v_1) = 2, \quad T(v_2) = 3 \quad \text{et} \quad T(v_3) = 1,$$

alors  $v_1 - v_2 + v_3$  est dans  $\text{Ker}(T)$ .

VRAI       FAUX

**Question 22:** Soient  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$  des vecteurs orthonormaux, avec  $0 < k < n$ .

Si  $W = \text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$  est un vecteur dans  $W^\perp$ , alors  $\text{Vect}(\vec{v}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $k + 1$ .

VRAI       FAUX

**Question 23:** Soit  $V$  un espace vectoriel et soient  $v_1, v_2, v_3$  trois vecteurs de  $V$ . Si l'ensemble  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est linéairement indépendant, alors l'ensemble  $\{v_1 - v_2, v_1 - v_3, v_2 - v_3\}$  est linéairement indépendant.

VRAI       FAUX

**Question 24:** Le nombre de lignes non nulles dans la forme échelonnée réduite d'une matrice est égal à son rang.

VRAI       FAUX

**Question 25:** Soient  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  et  $B$  une matrice de taille  $n \times m$ . Si  $AB$  est inversible, alors  $A$  et  $B$  sont inversibles.

VRAI       FAUX

**Question 26:** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de taille  $n \times n$ . Si  $A$  et  $B$  sont des matrices symétriques, alors  $A + B$  est diagonalisable.

VRAI       FAUX

**Question 27:** Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $3 \times 3$ . Si  $p(\lambda) = -\lambda(1 - \lambda)(2 - \lambda)$  est le polynôme caractéristique de  $A$ , alors  $\text{rang}(A) = 2$ .

VRAI       FAUX

**Question 28:** Si  $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  sont telles que  $(A + B)^T = A + B$ , alors  $A$  et  $B$  sont symétriques.

VRAI       FAUX

### Troisième partie, questions de type ouvert


- Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
- Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
- Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 29 :** *Cette question est notée sur 3 points.*

|                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

*Réservé au correcteur*

Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times n$  et soient  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$  tels que les vecteurs  $A\vec{u}, A\vec{v}, A\vec{w}$  sont linéairement indépendants. Montrer que les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  sont linéairement indépendants.



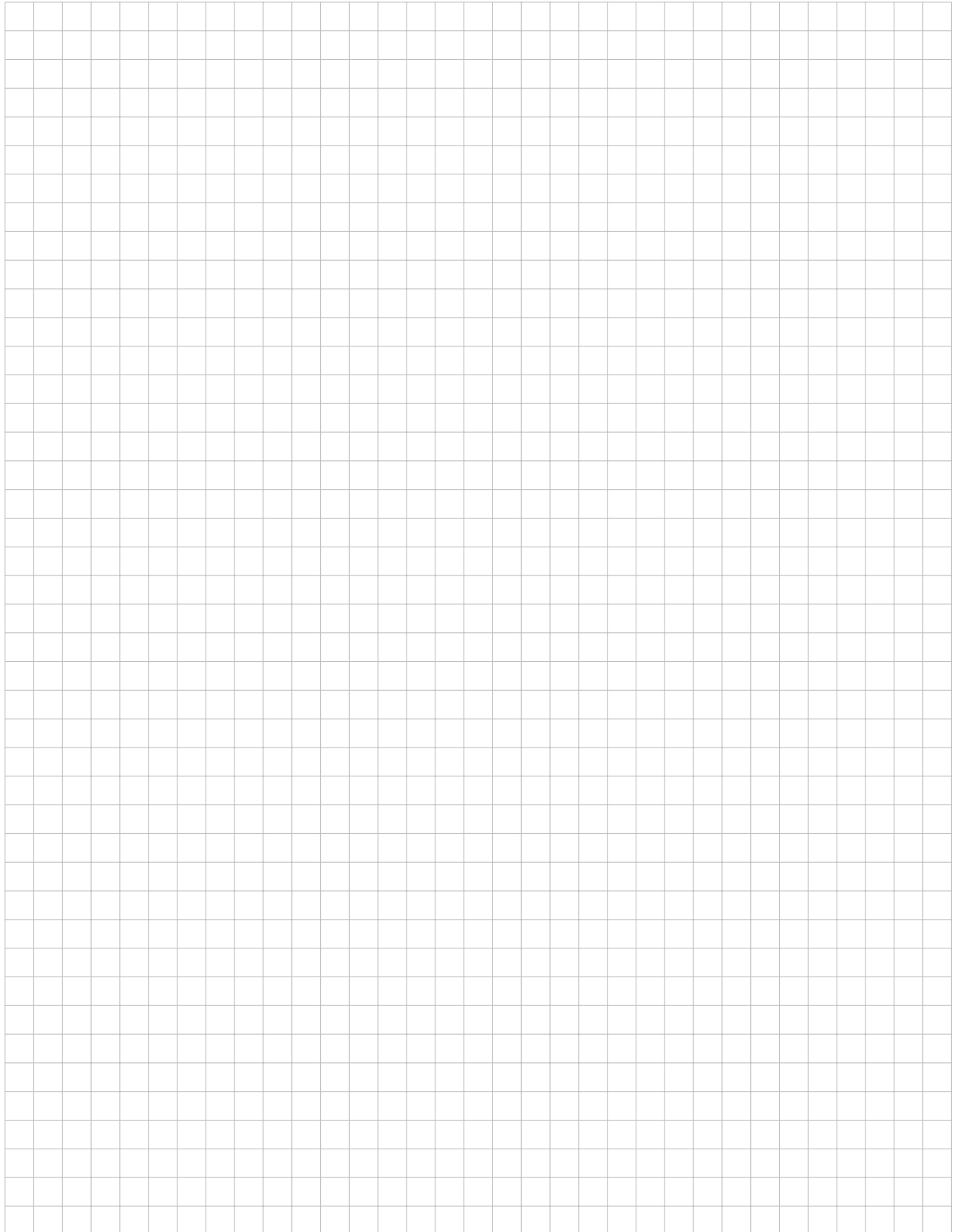
**Question 30:** Cette question est notée sur 3 points.

<sub>0</sub> <sub>1</sub> <sub>2</sub> <sub>3</sub>

*Réservé au correcteur*

Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times n$  telle que  $A^3 = I_n$ .

- (a) Déterminer  $\text{Ker}(A)$ .
- (b) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre de  $A$ . Déterminer la valeur de  $\lambda$ .



**Question 31 :** Cette question est notée sur 4 points.

<sub>0</sub> <sub>1</sub> <sub>2</sub> <sub>3</sub> <sub>4</sub> Réservé au correcteur

Soit  $A = \begin{bmatrix} 2025 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2025 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2025 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2025 \end{bmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$  et soit  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ .

- (a) Montrer que  $\vec{v}$  est un vecteur propre de  $A$  et déterminer la valeur propre correspondante.
- (b) Donner une base de l'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda = 2024$ .
- (c) Donner une matrice diagonale  $D$  semblable à la matrice  $A$ .

