

Algèbre linéaire

Examen

Partie commune

Automne 2023

Énoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- 1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 point si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- 1 point si la réponse est incorrecte.

Notations

- Pour une matrice A , a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
- Pour un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, x_i désigne la i -ème composante de \vec{x} .
- I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
- \mathbb{P}_n désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n .
- $M_{m,n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels.
- Pour $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire euclidien est défini par $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.
- Pour $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, la norme euclidienne est définie par $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondant à la réponse correcte. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

possède une décomposition QR telle que

$r_{12} = 0$ $r_{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $r_{12} = \sqrt{2}$ $r_{12} = 1$

Question 2 : Soient

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

deux bases ordonnées de \mathbb{R}^3 . Soit P la matrice de changement de base de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{C} , telle que $[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Alors la deuxième ligne de P est

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Question 3 : Soit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & \sqrt{3} & \pi & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \pi & 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \pi & 3 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Alors

$\det(A) = 12\pi$ $\det(A) = -6\pi$ $\det(A) = 0$ $\det(A) = \sqrt{6}\pi$

Question 4 : La droite qui approxime le mieux au sens des moindres carrés les points $(-3, -7), (-2, -3), (0, 3), (3, 7)$ est

$y = \frac{8}{7} + \frac{16}{7}x$ $y = -\frac{8}{7} + \frac{16}{7}x$ $y = \frac{16}{7} + \frac{8}{7}x$ $y = -\frac{16}{7} + \frac{8}{7}x$

Question 5 : Soit $\mathcal{B} = (2 - t, t + t^2, -1 + t^3, -1 - t + 2t^2)$ une base ordonnée de \mathbb{P}_3 . La quatrième coordonnée du polynôme $p(t) = t + 2t^2 + 3t^3$ par rapport à la base \mathcal{B} est égale à

3 $-\frac{1}{7}$ -7 $\frac{1}{7}$

Question 6: Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont

-3 et 2

-2 et 3

-1 et 2

-1 et 1

Question 7: Soient

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}.$$

Si \vec{b} est la projection orthogonale de \vec{y} sur $W = \text{Vect}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$, alors

$b_3 = \frac{5}{4}$

$b_3 = 20$

$b_3 = \frac{7}{8}$

$b_3 = 14$

Question 8: Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Si $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$ est une solution de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ au sens des moindres carrés, alors l'erreur de l'approximation de \vec{b} par $A\hat{x}$ est

$\|\vec{b} - A\hat{x}\| = \sqrt{2}$

$\|\vec{b} - A\hat{x}\| = 6$

$\|\vec{b} - A\hat{x}\| = 0$

$\|\vec{b} - A\hat{x}\| = \sqrt{6}$

Question 9: Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

possède une solution unique telle que

$x_1 = 3$

$x_1 = 2$

$x_1 = -2$

$x_1 = -3$

Question 10: Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors l'inverse $B = A^{-1}$ de la matrice A est tel que

$b_{33} = \frac{4}{39}$

$b_{41} = \frac{1}{3}$

$b_{43} = \frac{2}{3}$

$b_{33} = -\frac{1}{13}$

Question 11: Soit W l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2 et soit $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow W$ l'application linéaire définie par

$$T(a + bt + ct^2) = \begin{bmatrix} a & b - c \\ b - c & a + b + c \end{bmatrix} \quad \text{pour tout } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Soient

$$\mathcal{B} = (1, 1 - t, t + t^2) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

des bases ordonnées de \mathbb{P}_2 et W respectivement. La matrice A associée à T par rapport à la base \mathcal{B} de \mathbb{P}_2 et la base \mathcal{C} de W , telle que $[T(p)]_{\mathcal{C}} = A[p]_{\mathcal{B}}$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2$, est

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Question 12: La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- est inversible mais pas diagonalisable
 est inversible et diagonalisable
 n'est ni inversible ni diagonalisable
 est diagonalisable mais pas inversible

Question 13: Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Alors

- toutes les valeurs propres de A ont la même multiplicité géométrique
 $\lambda = 4$ est une valeur propre de A avec multiplicité algébrique 2
 toutes les valeurs propres de A ont la même multiplicité algébrique
 $\lambda = 2$ est une valeur propre de A avec multiplicité géométrique 2

Question 14: Soit $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - y \\ x - y \\ -5x + 6y \\ x + y \end{bmatrix}.$$

Alors

- T est injective mais pas surjective
 T est injective et surjective
 T n'est ni injective ni surjective
 T est surjective mais pas injective

Question 15: L'algorithme de Gram-Schmidt appliqué aux colonnes de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

fournit une base orthogonale de $\text{Im}(A)$ donnée par les vecteurs

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 16: Soit W un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de \mathbb{R}^n .

Si $\vec{u} \in W$, alors le produit scalaire euclidien entre \vec{u} et \vec{v} est égal au produit scalaire euclidien entre \vec{u} et la projection orthogonale de \vec{v} sur W .

VRAI FAUX

Question 17: Soit $T: \mathbb{P}_6 \rightarrow M_{3,2}(\mathbb{R})$ une application linéaire. Alors il existe $p, q \in \mathbb{P}_6$ tels que $p \neq q$ et $T(p) = T(q)$.

VRAI FAUX

Question 18: Soit $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$ une base de \mathbb{R}^m . Si A est une matrice de taille $m \times n$ telle que l'équation $A\vec{x} = \vec{b}_k$ possède au moins une solution pour tout $k = 1, \dots, m$, alors $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^m$.

VRAI FAUX

Question 19: Si $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ sont k vecteurs orthonormés de \mathbb{R}^n , alors le complément orthogonal de $\text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension $n - k$.

VRAI FAUX

Question 20: Si A et B sont deux matrices inversibles de taille $n \times n$ telles que $A + B$ n'est pas la matrice nulle, alors $A + B$ est aussi inversible.

VRAI FAUX

Question 21: Soit $A \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ une matrice de rang 3. Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont des vecteurs linéairement indépendants dans \mathbb{R}^4 , alors $A\vec{u}, A\vec{v}, A\vec{w}$ sont linéairement indépendants dans \mathbb{R}^4 .

VRAI FAUX

Question 22: Soit $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable avec valeurs propres 2, 3, -5. Alors

$$\det(A^3) = -27000.$$

VRAI FAUX

Question 23: Soient V et W deux espaces vectoriels et soit $T: V \rightarrow W$ une application linéaire.

Si $\dim(\text{Ker } T) = \dim(V)$, alors $\text{Im}(T) = \{\vec{0}_W\}$.

VRAI FAUX

Question 24: Soit A une matrice de taille $m \times n$ avec $m < n$. Si la forme échelonnée réduite de A possède exactement k lignes nulles, alors l'ensemble des solutions du système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension $n - k$.

VRAI FAUX

Question 25: Soit A une matrice de taille $n \times n$ et soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Si A est telle que $A^5 = 0$, alors T est surjective.

VRAI FAUX

Question 26: Si $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique, alors

$$\det(A - A^T) = \det(A) - \det(A^T).$$

VRAI FAUX

Question 27: Soit q un polynôme de degré 3 quelconque. Alors l'ensemble

$$\{p \in \mathbb{P}_3 \mid q(0) - p(0) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de \mathbb{P}_3 .

VRAI FAUX

Question 28: Soit W le sous-espace vectoriel de \mathbb{P}_5 engendré par $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_5$. Si $\dim(W) = 4$, alors il existe deux polynômes $p_5, p_6 \in \mathbb{P}_5$ tels que la famille $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ est une base de \mathbb{P}_5 .

VRAI FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

- Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
- Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
- Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 29 : *Cette question est notée sur 3 points.*

₀ ₁ ₂ ₃

Réservé au correcteur

Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs linéairement indépendants.

Soit A une matrice diagonalisable de taille $n \times n$ telle que $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sont des vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ respectivement.

Soit B une matrice diagonalisable de taille $n \times n$ telle que $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sont des vecteurs propres de B associés aux valeurs propres β_1, \dots, β_n respectivement.

Montrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable et satisfait

$$\det(A - B) = (\alpha_1 - \beta_1) \cdots (\alpha_n - \beta_n).$$



Question 30: Cette question est notée sur 3 points.

₀ ₁ ₂ ₃

Réservé au correcteur

Soit A une matrice symétrique de taille 3×3 dont les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2 \quad \text{et} \quad \lambda_3 = 4.$$

Soit c un nombre réel et soient

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} c \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

des vecteurs propres de la matrice A associés aux valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 respectivement.

Déterminer la valeur de c et construire la matrice A .

