

Algèbre linéaire

Examen

Partie commune

Automne 2022

Énoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- 1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 point si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- 1 point si la réponse est incorrecte.

Notations

- Pour une matrice A , a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
- Pour un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, x_i désigne la i -ème composante de \vec{x} .
- I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
- \mathbb{P}_n désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n .
- $M_{m,n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels.
- Pour $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire euclidien est défini par $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.
- Pour $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, la norme euclidienne est définie par $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondant à la réponse correcte. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : Soit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alors une solution au sens des moindres carrés $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$ de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ satisfait

$\hat{x}_1 = \frac{6}{17}$ $\hat{x}_1 = \frac{12}{35}$ $\hat{x}_1 = -\frac{6}{17}$ $\hat{x}_1 = -\frac{12}{35}$

Question 2 : Soit R la forme échelonnée réduite de la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors on a

$r_{14} = -4$ $r_{14} = -3$ $r_{14} = -6$ $r_{14} = 0$

Question 3 : La droite qui approxime le mieux au sens des moindres carrés les points $(-2, -1), (0, 1), (2, -2), (4, 1)$ est

$y = \frac{2}{5} + \frac{3}{20}x$ $y = -\frac{2}{5} - \frac{3}{20}x$ $y = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}x$ $y = -\frac{2}{5} + \frac{3}{20}x$

Question 4 : Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - 4z = a \\ x - z = 2 \end{cases}$$

possède des solutions si et seulement si

$a = -\frac{2}{9}$ $a = \frac{2}{9}$ $a = -\frac{9}{2}$ $a = \frac{9}{2}$

Question 5: Soient

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

deux bases ordonnées de \mathbb{R}^3 . Soit P la matrice de changement de base de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{C} , telle que $[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Alors la troisième colonne de P est

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

 $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

 $\begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Question 6: Soit t un paramètre réel. Les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} t \\ -9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

sont linéairement dépendants si et seulement si

$t \neq 5$

 $t = 5$

 $t \neq -5$

 $t = -5$

Question 7: Soit $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$T(p) = \begin{bmatrix} p(0) & p(1) \\ p(-1) & p(0) \end{bmatrix}, \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{P}_2.$$

Soient

$$\mathcal{B} = (1, t + t^2, t - t^2) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

des bases ordonnées de \mathbb{P}_2 et $M_{2,2}(\mathbb{R})$ respectivement. La matrice A associée à T par rapport à la base \mathcal{B} de \mathbb{P}_2 et la base \mathcal{C} de $M_{2,2}(\mathbb{R})$, telle que $[T(p)]_{\mathcal{C}} = A[p]_{\mathcal{B}}$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2$, est

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Question 8: Soient

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} a & 3b & c \\ d+2a & 3e+6b & f+2c \\ g & 3h & k \end{bmatrix}$$

deux matrices de taille 3×3 . Si $\det(A) = 1$, alors on a

$\det(B) = 1$

 $\det(B) = 2$

 $\det(B) = 3$

 $\det(B) = 6$

Question 9: L'inverse de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

est

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Question 10: L'algorithme de Gram-Schmidt appliqué aux colonnes de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

fournit une base orthogonale de $\text{Im}(A)$ donnée par les vecteurs

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Question 11: La projection orthogonale du vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ sur le sous-espace vectoriel engendré par la

première et la deuxième colonne de la matrice A de la Question 10 est le vecteur

$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 18 \\ 2 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix}$

Question 12: La matrice A de la Question 10 possède une décomposition QR telle que

$r_{23} = \frac{3}{\sqrt{6}}$

$r_{23} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

$r_{23} = -2$

$r_{23} = -\sqrt{6}$

Question 13: Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Alors

$\lambda = 4$ est une valeur propre avec multiplicité géométrique 2

$\lambda = 3$ est une valeur propre avec multiplicité algébrique 1

$\lambda = 3$ est une valeur propre avec multiplicité géométrique 2

$\lambda = 4$ est une valeur propre avec multiplicité géométrique 1

Question 14: Soit $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Alors

- T est injective mais pas surjective
- T n'est ni injective ni surjective
- T est injective et surjective
- T est surjective mais pas injective

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 15 : Soit V un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et soient \vec{w}_1 et \vec{w}_2 deux vecteurs de \mathbb{R}^4 . Si les vecteurs \vec{w}_1 et \vec{w}_2 sont linéairement indépendants, alors les vecteurs $\text{proj}_V(\vec{w}_1)$ et $\text{proj}_V(\vec{w}_2)$ sont linéairement indépendants.

VRAI FAUX

Question 16 : Soit $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ une famille orthogonale de vecteurs de \mathbb{R}^n . Si $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ est tel que $\{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ est une famille orthogonale, alors \vec{v}_0 est orthogonal à $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$.

VRAI FAUX

Question 17 : Si A est une matrice de taille $m \times n$, alors on a

$$\dim(\text{Im } A) + \dim(\text{Im } A^T) + \dim(\text{Ker } A) + \dim(\text{Ker } A^T) = m + n.$$

VRAI FAUX

Question 18 : Soient A et P deux matrices de taille $n \times n$. Si $P^T A P$ est symétrique, alors A est symétrique.

VRAI FAUX

Question 19 : Soit $W = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$. Alors W est un sous-espace vectoriel de $M_{2,2}(\mathbb{R})$ de dimension 3.

VRAI FAUX

Question 20 : Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Si R est la forme échelonnée réduite de A , alors

$$\det(A) = \det(R).$$

VRAI FAUX

Question 21 : Soient A et B deux matrices carrées de taille $n \times n$. Si A et B ont le même polynôme caractéristique, alors A et B ont les mêmes valeurs propres et pour chaque valeur propre λ on a

$$\dim(\text{Ker}(A - \lambda I_n)) = \dim(\text{Ker}(B - \lambda I_n)).$$

VRAI FAUX

Question 22 : Soient V et W des espaces vectoriels de dimension finie et soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Soit d la dimension de l'image de T . Alors $d \leq \dim(W)$ et $d \leq \dim(V)$.

VRAI FAUX

Question 23 : Si A est une matrice de taille $m \times n$ dont les colonnes forment une base de \mathbb{R}^m , alors pour tout choix de $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ possède une solution unique.

VRAI FAUX

Question 24: Soit V un espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une famille de vecteurs de V . Si toute sous-famille de \mathcal{F} formée de $n - 1$ éléments est linéairement indépendante, alors \mathcal{F} est une base de V .

VRAI FAUX

Question 25: Si A et B sont deux matrices inversibles de taille $n \times n$, alors $(A + B)^2$ est inversible.

VRAI FAUX

Question 26: L'ensemble $\{p \in \mathbb{P}_n \mid p(-t) = -p(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{P}_n .

VRAI FAUX

Question 27: Si \vec{v} et \vec{w} sont deux vecteurs de \mathbb{R}^3 , alors la matrice

$$A = \vec{v}\vec{v}^T - \vec{w}\vec{w}^T$$

est diagonalisable.

VRAI FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

- Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
- Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
- Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 28 : *Cette question est notée sur 3 points.*

₀ ₁ ₂ ₃

Réservé au correcteur

Soit A une matrice de taille $m \times n$ à coefficients réels telle que sa forme échelonnée réduite contient exactement k lignes nulles. Déterminer le rang de A et la dimension de $\text{Ker}(A)$ en fonction de m , n et k .



Question 29: Cette question est notée sur 3 points.

₀ ₁ ₂ ₃

Réservé au correcteur

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$ à coefficients réels. Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de A et $W = \text{Vect}(\vec{v})$. Montrer que si $\vec{y} \in W^\perp$, alors $A\vec{y} \in W^\perp$.



Question 30: *Cette question est notée sur 3 points.*

₀ ₁ ₂ ₃

Réservé au correcteur

Soit A une matrice de taille $n \times n$ à coefficients réels et soit O la matrice nulle de taille $n \times n$.

Montrer que si A est diagonalisable et $A^2 = O$, alors $A = O$.

