Série 9

Cette série fait suite aux chapitres 1.3, 1.4, 1.5 Mots-clés : *Espaces vectoriels, application linéaire, noyau, image, dimension, matrice d'une application linéaire, changement de base*

Remarques :

1. La série est volontairement longue, il n'est pas indispensable de la finir en une semaine. Vous pouvez sauter certains exercices, et les aborder pendant les vacances, ou pendant les séances de révision.
2. Il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.
3. Il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Soit $\mathbb{P}_2$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, dont on admet que c'est un espace vectoriel. On considère la transformation $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que T est linéaire.
b) Trouver une base de $\operatorname{Ker} T$.
c) Trouver une base de $\operatorname{Im} T$.

Exercice 2

Soit $\overrightarrow{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Soient E la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et B une base de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

a) Donner la matrice M qui représente T par rapport aux bases E (de départ) et B (d'arrivée).
b) Même question pour les bases B (de départ) et E (d'arrivée).
c) Même question pour les bases B (de départ) et B (d'arrivée).

Exercice 3

a) Soit A une matrice 5×6. Si $\dim(\mathrm{Ker}A) = 3$, quel est le rang de A ?
b) Soit A une matrice 7×3. Quel est le rang maximum de A ? Quelle est la dimension minimum de $\mathrm{Ker}A$? Même question si A est une matrice 3×7.
c) Soit A une matrice $n \times n$. Donner une condition sur $\mathrm{rang}(A)$ pour que A^T soit inversible.
d) Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une transformation linéaire telle que $T \circ T \circ T = I_3$ (l'application identité). Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}T$?

Exercice 4

Soient $B = \{\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2\}$ et $C = \{\overrightarrow{c}_1, \overrightarrow{c}_2\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. On suppose $\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Donner la matrice de changement de base (matrice de passage) de la base C vers la base B.
b) Donner la matrice de changement de base (matrice de passage) de la base B vers la base C.
c) Si $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$ est tel que $[\overrightarrow{v}]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, calculer $[\overrightarrow{v}]_C$.
d) À présent, si $[\overrightarrow{v}]_C = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculer $[\overrightarrow{v}]_B$.

Exercice 5

Soit la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une base de $\mathrm{Ker}C$.
2. On note par T la transformation linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par $T(\overrightarrow{x}) = C\overrightarrow{x}$. L'application T est-elle injective ? T est-elle surjective ? Justifier votre réponse.

Exercice 6

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que les matrices A et B sont équivalentes (selon les lignes). (**Indication :** quelle est la forme échelonnée et réduite des deux matrices ?)

b) Calculer le rang de A et $\dim(\mathrm{Ker}A)$.
c) Trouver une base pour chacun des sous-espaces $\mathrm{Im}A$, $\mathrm{Ker}A$ et $\mathrm{Ker}A^T$, ainsi que du sous-espace $\mathrm{Lgn}(A)$ engendré par les lignes de A.

Exercice 7

On considère la transformation $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que T est linéaire.
b) Trouver la dimension et une base de $\mathrm{Im}T$.
c) Appliquer le Théorème du rang pour trouver la dimension du noyau de T.
d) Vérifier le résultat de c) en trouvant une base de $\mathrm{Ker}T$.

Exercice 8

On considère la transformation $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ définie par

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a + b + c + d) + (a + b)t + (c + d)t^2.$$

a) Vérifier que T est linéaire.
b) Trouver la dimension et une base de $\mathrm{Im}T$.
c) Vérifier que le polynôme $7 + 5t + 2t^2$ est bien dans l'image de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en (b).
d) Trouver la dimension et une base de $\mathrm{Ker}T$.
e) Vérifier que le polynôme $2 - 2t - 5t^2 + 5t^3$ est bien dans le noyau de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en (d).

Exercice 9

Dans $\mathbb{P}_2$, calculer la matrice de changement de base de la base

$$\mathcal{B} = (1 - 2t + t^2, 3 - 5t + 4t^2, 2t + 3t^2)$$

vers la base canonique $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$. Puis écrire les coordonnées du vecteur $p = -1 + 2t$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 10

1. Soit $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

a) Donner la matrice A de l'application linéaire T par rapport aux bases canoniques E de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

b) Donner la matrice B de l'application linéaire T par rapport aux bases

$$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\} \text{ de } \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\} \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

2. Soit $T\colon \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $T(C) = X \cdot C$, où X est la matrice de taille 2×2

$$X = \begin{pmatrix}1 & 3/2\\2 & 3\end{pmatrix}.$$

a) Donner la matrice A de l'application linéaire T par rapport à la base canonique de $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$.

b) Donner la matrice B de l'application linéaire T par rapport à la base

$$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 0\\-2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6 & 3\\-4 & -2\end{pmatrix}\} \text{ de } \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R}).$$

On cherche $B = \big([T(B_1)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_2)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_3)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_4)]_{\mathcal{B}}\big)$.

Exercice 11

Soit $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels.

1. Soit $V = \{M \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid M \text{soit inversible}\}$. Alors
   - ☐ V est un sous-espace vectoriel de $M_{2\times2}$
   - ☐ V est un espace vectoriel.
   - ☐ V n'est pas un espace vectoriel.
   - ☐ V est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices inversibles.
2. Soit $E = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix}-1 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}$. Alors

   ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\\1\end{pmatrix}$ ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix}-1\\-2\\2\\1\end{pmatrix}$

   ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix}-1\\2\\-2\\1\end{pmatrix}$ ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}$
3. Quelle famille ci-dessous est une base de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$.

   ☐ $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\right\}$

$\square$ $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

$\square$ $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$

$\square$ $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$

Exercice 12

Soit $B = (1+t^2, 1-3t^2, 1+t-3t^2)$ une base de $\mathbb{P}_2$. Soit $E = (1, t, t^2)$ la base canonique de $\mathbb{P}_2$.

1. Soit $q \in \mathbb{P}_2$ donné par
$$[q]_B = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}.$$
Trouver $[q]_E$ en suivant les différentes méthodes vues en cours.
   a) En utilisant une multiplication matrice-vecteur : $P_{EB}[q]_B = [q]_E$.
   b) Sans passer pas une matrice de changement de base, mais en utilisant la définition de $[\cdot]_B$.
   c) Résoudre $P_{BE}[q]_E = [q]_B$.
2. Soit maintenant $q(t) = -2+5t-2t^2$. Trouver $[q]_B$ en suivant les différentes méthodes vues en cours.
   a) En utilisant une multiplication matrice-vecteur : $P_{BE}[q]_E = [q]_B$.
   b) Sans passer pas une matrice de changement de base, mais en utilisant la définition de $[\cdot]_E$.
   c) Résoudre $P_{EB}[q]_B = [q]_E$.

Exercice 13

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Le plan défini dans $\mathbb{R}^3$ par $z = 2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.	$\square$	$\square$
b) $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$ si et seulement si l'application $\overrightarrow{x} \mapsto A\overrightarrow{x}$ est surjective.	$\square$	$\square$
c) Soit V un espace vectoriel et $u \in V$. Alors l'opposé $-u$ de u est unique et $-u = (-1)u \in V$.	$\square$	$\square$
d) Soit A une matrice de taille $m \times n$, alors $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.	$\square$	$\square$

Exercice 14

a) Soit a, b, c des nombres réels. On considère les quatre polynômes $p(t) = t^2 + t + 1$, $q(t) = t^2 + 2t + a$, $r(t) = t^3 + b$ et $s(t) = t + c$. Alors

☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ forme une base de $\mathbb{P}_4$ pour certaines valeurs des paramètres a, b, c ;

☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ forme une base de $\mathbb{P}_3$ pour certaines valeurs des paramètres a, b, c ;

☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ est toujours linéairement dépendante dans $\mathbb{P}_4$;

☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ est linéairement dépendante dans $\mathbb{P}_3$ lorsque $a - c - 1 \neq 0$.

b) Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Alors les matrices A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, sont linéairement indépendantes

☐ pour toutes valeurs de a, b.

☐ lorsque $a \neq 0$ et pour toutes valeurs de b.

☐ lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 3$.

☐ lorsque $a \neq 0$ et $b = 3$.

c) Dire lequel parmi les énoncés suivants est vrai.

☐ Soit f un vecteur de l'espace vectoriel V des fonctions réelles d'une variable réelle. S'il existe un réel t tel que $f(t) = 0$, alors f est le vecteur nul de V.

☐ Soit f un vecteur de l'espace vectoriel V des fonctions réelles d'une variable réelle. Si f est le vecteur nul de V, alors $f(t) = 0$ pour tout nombre réel t.

☐ Soit p un vecteur de l'espace vectoriel V des polynômes de degré $\leqslant 5$. Si $p(0) = 0$, alors p est le vecteur nul de V.

☐ Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ un vecteur de l'espace vectoriel V des suites réelles. S'il existe un entier n tel que $x_n = 0$, alors $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est le vecteur nul de V.

Exercice 15

a) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$.

☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 0.

☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 0.

☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1.

☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.

b) On considère les polynômes $p(t) = (1-t)(1+t) = 1-t^2$ et $q(t) = (1+t)(1+t) = 1+2t+t^2$ de $\mathbb{P}_2$.

☐ Les polynômes p et q sont linéairement indépendants.

☐ Les polynômes p et q forment une base de $\mathbb{P}_2$.

☐ Le polynôme $q-p$ est le polynôme nul.

☐ $(1+t)p-(1-t)q$ est une combinaison linéaire de p et q.

c) Soit W l'hyperplan dans $\mathbb{R}^6$ donné par l'équation $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=0$. On considère les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

☐ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.

☐ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.

☐ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.

☐ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.

d) Soit V un espace vectoriel et $v_1, \ldots, v_k$ des vecteurs de V.

☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V = k$.

☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V \geqslant k$.

☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V, alors $\dim V = k$.

☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V, alors $\dim V \geqslant k$.

e) Soit $\mathrm{Tr}\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application linéaire "trace" définie par

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a+d.$$

☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 1.

☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 2.

☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 3.

☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 4.

f) Soit $\mathrm{Tr}\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application linéaire "trace" définie à la question f. Les matrices suivantes forment une base du noyau de Tr :

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 16

Choix Multiple et Vrai-faux .

a. Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$.

☐ ImA est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 0

☐ ImA est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 0

☐ ImA est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1

☐ ImA est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1

b. Soit A une matrice de taille $m \times n$.

☐ Les colonnes de A engendrent le noyau de A^T.

☐ Le sous-espace engendré par les lignes de A est égal au sous-espace engendré par les colonnes de A.

☐ Le sous-espace engendré par les lignes de A est isomorphe au sous-espace engendré par les colonnes de A.

☐ La dimension du noyau de A est égale à la dimension du noyau de A^T.

c. Il existe une matrice A de taille 3×7 telle que :

☐ dimKer$A = 2$ et dimIm$A \leqslant 4$

a. ☐ ImA est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1.

La matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$ représente une application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$. Ainsi Im$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$, pas de $\mathbb{R}^2$. Pour trouver sa dimension, il faut analyser les colonnes de A. On constate qu'elles sont proportionnelles si bien que la dimension de $\mathrm{Im}A$ est 1.

b. ☐ Le sous-espace engendré par les lignes de A est isomorphe au sous-espace engendré par les colonnes de A.

La dimension du sous-espace engendré par les lignes de A est égale à celle du sous-espace engendré par les colonnes de A. C'est la clé du Théorème du rang ! Ces deux sous-espaces sont donc tous deux isomorphes à $\mathbb{R}^k$ si k est cette dimension. Ils sont donc isomorphes, c'est-à-dire que l'on peut les identifier en faisant correspondre les éléments d'une base de l'un à ceux d'une base de l'autre. Par contre ils ne sont pas égaux en général puisqu'ils ne vivent pas même dans le même espace vectoriel ambiant. L'espace des lignes est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, alors que celui des colonnes est un sous-espace de $\mathbb{R}^m$.

Pour se rendre compte que les deux autre affirmations sont fausses, pensez par exemple une matrice non nulle ayant une unique ligne et disons 10 colonnes. Le noyau de cette matrice est de dimension 9 (une équation à 10 inconnues) alors que le noyau de la transposée est nul. Visiblement les colonnes de A ne peuvent engendrer le noyau de A^T.

c. ☐ $\dim\mathrm{Ker}A = 5$ et $\dim\mathrm{Im}A = 2$

La matrice A représente une application linéaire de $\mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^3$. Par conséquent, l'image de A est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$, c'est donc un sous-espace de dimension $\leqslant 3$. Le Théorème du rang affirme que $\dim\mathrm{Ker}A = 7-\dim\mathrm{Im}A \geqslant 7-3 = 4$, ce qui élimine les deux premières affirmations. Intuitivement c'est clair : il faut “tuer” au moins un sous-espace de dimension 4 pour envoyer un espace de dimension 7 dans $\mathbb{R}^3$. Enfin le Théorème du rang s'écrit aussi $\dim\mathrm{Ker}A+\dim\mathrm{Im}A = 7$, ce qui élimine aussi la troisième affirmation. la seule qui ne contredit pas le Théorème du rang est la dernière.

d. ☐ $\dim\mathrm{Ker}A = 1$ et $\dim\mathrm{Im}A = 2$

On a $\dim\mathrm{Ker}A = 1$, puisque le noyau est la droite $\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{e}_3\}$. et $\dim\mathrm{Im}A = 2$ puisque l'image de A est le plan Oxy, un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

e. ☐ Les lignes de A sont linéairement indépendantes.

La forme échelonnée d'une matrice inversible a un pivot dans chaque ligne et chaque colonne. Ainsi les colonnes, et les lignes également, forment une base de $\mathbb{R}^5$. Donc en particulier elles engendrent $\mathbb{R}^5$ et elles sont linéairement indépendantes. L'application linéaire que représente A est bijective, si bien que le noyau est *nul* (pas vide !), et l'image de A est $\mathbb{R}^5$ tout entier, donc le rang de A vaut 5.

f. ☐ 3×9.

La dimension de l'espace $\mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{R})$ est 9. Donc T est une application linéaire d'un espace de dimension 9 vers un espace de dimension 3. Ainsi la matrice qui la représente est de taille 3×9.

g. ☐ $\dim\mathrm{Ker}T = 2$ et $\dim\mathrm{Im}T = 1$.

L'application T est linéaire et, plus explicitement, on a $T(a+bt+ct^2) = 3a+2c$. En particulier, T n'est pas l'application nulle et donc la dimension de l'image de T est 1. Par le théorème du rang, celle du noyau est 2.

h. ☐ $\{-2+t+3t^2, 2-3t^2\}$.

Par g., la dimension du noyau vaut 2. Il faut donc 2 polynômes linéairement indépendants pour engendrer le noyau. On remarque que les polynômes $-2+t+3t^2$ et $2-3t^2$ sont des polynômes linéairement indépendants qui appartiennent au noyau de T. Ils forment donc une base du noyau. En revanche, le polynôme $3+2t^2$ n'est pas dans le noyau car $T(3+2t^2) = 13 \neq 0$.

☐ $\dim\mathrm{Ker}A = 3$ et $\dim\mathrm{Im}A = 4$

☐ $\dim\mathrm{Ker}A = 4$ et $\dim\mathrm{Im}A \leqslant 2$

☐ $\dim\mathrm{Ker}A = 5$ et $\dim\mathrm{Im}A = 2$

d. Soit A la matrice de la projection orthogonale $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sur le plan horizontal $\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2\}$.

☐ $\dim\mathrm{Ker}A = 1$ et $\dim\mathrm{Im}A = 1$

☐ $\dim\mathrm{Ker}A = 2$ et $\dim\mathrm{Im}A = 1$

☐ $\dim\mathrm{Ker}A = 1$ et $\dim\mathrm{Im}A = 2$

☐ $\dim\mathrm{Ker}A = 2$ et $\dim\mathrm{Im}A = 2$

e. Soit A une matrice inversible de taille 5×5. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

☐ Les colonnes de A n'engendrent pas $\mathbb{R}^5$.

☐ Les lignes de A sont linéairement indépendantes.

☐ Le noyau de A est vide.

☐ Le rang de A est strictement plus petit que 5.

f. La matrice qui représente une application linéaire $T\colon \mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ est de taille

☐ 3×3.

☐ 3×9.

☐ 3×6.

☐ 9×3.

g. Soit $T\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ définie par $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$. Alors

☐ T n'est pas linéaire.

☐ $\dim \mathrm{Ker} T = 1$ et $\dim \mathrm{Im} T = 2$.

☐ $\dim \mathrm{Ker} T = 1$ et $\dim \mathrm{Im} T = 1$.

☐ $\dim \mathrm{Ker} T = 2$ et $\dim \mathrm{Im} T = 1$.

h. Soit $T\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ définie par $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$. Une base du noyau de T est donnée par

☐ $\{t\}$.

☐ $\{t, 3 + 2t^2\}$.

☐ $\{-2 + t + 3t^2, 2 - 3t^2\}$.

☐ $\{2 - 3t^2\}$.

Exercices additionnels

Exercice 17

Soit $\mathbb{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2. Parmi les quatre sous-ensembles de $\mathbb{P}_2$ ci-dessous, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{P}_2$

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_0 = a_2^2\} \\
E_2 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, p(0) = 1\} \\
E_3 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, p'(t) = 0\} \\
E_4 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_0 = a_1 = a_2\}
\end{aligned}$$

Exercice 18

Soient V et W deux espaces vectoriels, et $T : V \to W$ une transformation linéaire. Montrer que si $U \subset V$ est un sous-espace vectoriel, alors l'ensemble image $T(U)$ est un sous-espace vectoriel de W.

Exercice 19

On rappelle que $C([0,1])$ est l'espace vectoriel des fonctions continues sur le segment $[0,1]$.

a) L'ensemble de vecteurs $\{t \mapsto \sin t,\ t \mapsto \cos t\}$ est-il linéairement indépendant dans $C([0,1])$?

b) Même question pour $\{t \mapsto \sin t,\ t \mapsto \sin t \cos t,\ t \mapsto \sin 2t\}$.

Exercice 20

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times p$ telles que

$$Ker A \cap Col B = \{\overrightarrow{0}\}.$$

Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b}_1, \cdots, \overrightarrow{b}_k\}$, $k \leqslant n$, une base de $ColB$. Montrer que $\{A\overrightarrow{b}_1, \cdots, A\overrightarrow{b}_k\}$ est une base de $Col(AB)$.

Exercice 21

Soient V et W deux espaces vectoriels, T une transformation linéaire : $T : V \to W$ et $\{v_1, \ldots, v_p\}$ un sous-ensemble de V.

a) Montrer que si l'ensemble $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est linéairement dépendant alors l'ensemble $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ est linéairement dépendant.
b) Supposons que la transformation T est injective, c'est-à-dire que $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$. Montrer que si l'ensemble $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est linéairement indépendant alors l'ensemble $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ est linéairement indépendant.

Exercice 22

Vous pouvez ignorer la partie (c).

a) Soit W l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation $x - y + z = 0$. Trouver une application linéaire $\psi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dont W est le noyau, puis donner une base de ce sous-espace.

b) Soit U le sous-ensemble des polynômes p de $\mathbb{P}_2$ vérifiant $p(1) = 0$. Trouver une application linéaire $\varphi \colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ dont U est le noyau, puis donner une base de ce sous-espace.

c) Construire un isomorphisme $F \colon U \to W$. On pourra utiliser la notion de coordonnées pour comparer U avec $\mathbb{R}^2$, puis $\mathbb{R}^2$ avec W.

Exercice 23

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Démontrer que $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ admet une solution pour tout $\overrightarrow{b}$ dans $\mathbb{R}^m$ si et seulement si $A^T\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$ n'admet que la solution triviale $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 24

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Donner une base pour le noyau, l'image, et l'espace engendré par les lignes de A, puis vérifier que l'affirmation du théorème du rang est bien vérifiée.

Exercice 25

Considérer l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \\ x_1 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Donner la matrice de T dans la base $\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.

Exercice 26

Soit V un espace vectoriel muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire. En n'utilisant QUE les 10 axiomes d'un espace vectoriel, montrer les propriétés suivantes. Notons l'élément nul de V avec 0_V, afin de le distinguer de 0.

a) L'élément inverse de $v \in V$ est unique.
b) $0v = 0_V$ et $0_V = -0_V$.
c) $\alpha 0_V = 0_V$.
d) $(-1)v = -v$.

Exercice 27

Prouver le théorème suivant. *Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de V. Alors toute famille d'éléments de V de plus de n éléments est une famille linéairement dépendante.*

Réponses de certains exercices:

Ex-1 b) $\{t, t^2\}$ est une base possible c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base possible.

<u>Exercices additionnels</u>

Ex-17 E_3 et E_4 sont des sous-EV.
