Série 8

Cette série fait suite aux chapitres 1.3, 1.4, 1.5 Mots-clés : *Matrice triangulaire, déterminant*

Remarques :

1. La série est volontairement longue, il n'est pas indispensable de la finir en une semaine. Vous pouvez sauter certains exercices, et les aborder pendant les vacances, ou pendant les séances de révision.
2. Il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.
3. Il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Soit $\mathbb{P} = \{p(t) = (a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots) \ : \ a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On définit sur cet ensemble les deux lois suivantes : la loi d'addition $p + q : (p + q)(t) = p(t) + q(t)$, $t \in \mathbb{R}$, et la loi de multiplication par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha p : (\alpha p)(t) = \alpha\, p(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $\mathbb{P}$ muni des deux lois définies plus haut est un espace vectoriel.

b) Montrer que l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_n = \{p(t) = (a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) \ : \ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ muni des deux mêmes lois est un espace vectoriel.

c) Montrer que l'ensemble des polynômes de degré 2

$$\{p(t) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) \ : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \ a_2 \neq 0\}$$

muni des deux mêmes lois ***n'est pas*** un espace vectoriel.

Soit $\mathbb{S} = \{y = (..., y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, ...) = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}} \ : \ \forall k \in \mathbb{Z}, y_k \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des suites réelles sur $\mathbb{Z}$. On définit sur cet ensemble les deux lois suivantes : la loi d'addition $w = y+z$: $w_k = y_k + z_k$, $k \in \mathbb{Z}$, et la loi de multiplication par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, $w = \alpha y : w_k = \alpha y_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Montrer que $\mathbb{S}$ muni des deux lois définies plus haut est un espace vectoriel.

Soit $\mathbb{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit sur cet ensemble les deux lois suivantes : la loi d'addition $f+g : (f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, et la loi de multiplication par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f : (\alpha f)(x) = \alpha\, f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

e) Montrer que $\mathbb{F}$ muni des deux lois définies plus haut est un espace vectoriel.

f) On munit $\mathbb{F}$ des deux lois définies plus haut. Montrer que $\mathbb{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$.

g) Montrer que l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $C(\mathbb{R})$, muni des deux mêmes lois, est un espace vectoriel.

h) On munit $C(\mathbb{R})$ de ces deux mêmes lois. Montrer que

$$C^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ est dérivable de dérivée continue}\}$$

est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$.

Exercice 2

On rappelle que $\mathbb{P}_3$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

a) Les vecteurs de $\mathbb{P}_3$ suivants sont-ils linéairement indépendants ?

(i) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 - t^2$, $p_2(t) = t^2$, $p_3(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$.

(ii) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 + t + t^2$, $p_2(t) = t + t^2$, $p_3(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Les vecteurs p_1, p_2, p_3 de (ii) forment-ils une base de $\mathbb{P}_3$?

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et de $\mathrm{Im}(A)$.

Exercice 4

a) Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^2$ donné par $W = \mathrm{Span}\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ où $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Trouver un sous-ensemble B de $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ tel que B soit une base de W.

c) Agrandir l'ensemble $\{\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2\} \subset W$ pour obtenir une base de W.

Exercice 5

Soit $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×2.

a) Montrer que les matrices A, B et C données par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes.

b) Trouver a, b, c, d tels que pour $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, les matrices A, B, C, D forment une base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Exercice 6

a) On considère le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Trouver les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2)$ de $\mathbb{R}^2$, où $\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Même question pour $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ donné dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à exprimer dans la base $(\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \overrightarrow{b}_3)$ donnée par $\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le rang de A et la dimension du noyau de A.
b) Même question pour A^T.
c) On suppose qu'une matrice A de taille 7×7 possède un pivot dans chaque ligne. Quel est le rang de A ? Quelle est la dimension du noyau de A ?
d) On considère une matrice A de taille $m \times n$ et un vecteur $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$. Quelle doit être la relation entre le rang de $[\,A \;\; \overrightarrow{b}\,]$ et le rang de A pour que l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ soit compatible ?

Exercice 8

a) Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$ sont équivalentes.
b) Calculer $\text{rang}(A)$, $\dim(\text{Ker}A)$, $\text{rang}(B)$, $\dim(\text{Ker}B)$.
c) Trouver une base de Ker$A$ et Ker$B$.

Exercice 9

On se donne une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

où $[x]_{\mathcal{B}}$ désigne le vecteur des coordonnées du vecteur x dans cette base. Trouver le vecteur $\overrightarrow{x}$ (c'est-à-dire ses coordonnées dans la base standard). Trouver les coordonnées $[y]_{\mathcal{B}}$ du vecteur

$$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10

Trouver une base de l'espace engendré par les vecteurs suivants :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Soient V un espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de V. Alors on a aussi que V est un sous-espace vectoriel de lui-même (ou d'un espace vectoriel plus grand) et H est un espace vectoriel. ☐ ☐

b) Si H est un sous-ensemble d'un espace vectoriel V, alors il suffit que 0_V soit dans H pour que H soit un sous-espace vectoriel de V. ☐ ☐

c) Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{\vec{0}\}$. ☐ ☐

d) Le noyau d'une matrice A n'est pas nécessairement un espace vectoriel. ☐ ☐

Exercice 12

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Le plan défini dans $\mathbb{R}^3$ par $z = 2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. ☐ ☐

b) $\mathrm{Ker}(A) = \{\vec{0}\}$ si et seulement si l'application $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est surjective. ☐ ☐

c) Soit V un espace vectoriel et $u \in V$. Alors l'opposé $-u$ de u est unique et $-u = (-1)u \in V$. ☐ ☐

d) Soit A une matrice de taille $m \times n$, alors $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. ☐ ☐

<u>**Exercices additionnels**</u>

Exercice 13

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$, on définit l'intervalle ouvert $I = (a, b)$, et les ensembles $C(I) = \{f : I \to \mathbb{R},\ f \text{ est continue}\}$ et $C^1(I) = \{f : I \to \mathbb{R},\ f \text{ est dérivable sur } I \text{ et } f' \text{ est continue}\}$.

a) Vérifier que $C(I)$ et $C^1(I)$ sont des espaces vectoriels.

b) Montrer que la transformation $T : C(I) \to C^1(I)$ donnée par $T(f)(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, $x \in I$, est bien définie et linéaire.

Exercice 14

Soit B une matrice sous forme échelonnée.

a) Montrer que les colonnes de B qui ont une position pivot (c.-à-d. les colonnes pivots) sont linéairement indépendantes.
b) Montrer que les colonnes de B qui n'ont pas de position pivot sont combinaison linéaire des colonnes pivots.

Exercice 15

Soit $B = (1 - 3t^2, 2 + t - 5t^2, 1 + 2t)$.

a) Vérifier que B est une base de $\mathbb{P}_2$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
b) Déterminer la matrice de passage de la base B vers la base canonique $\{t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2\}$.
c) Écrire $t \mapsto t^2$ comme combinaison linéaire des vecteurs de B.

Exercice 16

Montrer que la dimension de $\mathbb{P}$ (espace des polynômes à coefficients réels) est infinie.

Exercice 17

Répondre aux questions ci-dessous pour chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \\ 9 & -7 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ -6 & 3 & 0 & -7 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Les colonnes sont-elles linéairement indépendantes ou linéairement dépendantes ?
2. Les colonnes engendrent-elles $\mathbb{R}^3$?

Exercice 18

En calculant la forme échelonnée d'une matrice, montrer que le vecteur $\overrightarrow{v}$ est dans le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$:

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Exercice 19

Soit $\mathbb{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 2$.

1. Décrire tous les sous-espaces de $\mathbb{P}_2$ (en fonction du nombre d'éléments de leurs bases).
2. Calculer le vecteur de coordonnées du polynôme $f(t) = 1 + 4t + 7t^2$ dans la base $\mathcal{F} = (1 + t^2, t + t^2, 1 + 2t + t^2)$.

La partie 1. vous propose de réfléchir aux sous-espaces de polynômes de façon géométrique : pensez-y quelques instants et puis lisez la solution.

Exercice 20

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble formé des quatre premiers polynômes de Hermite :

$$\mathcal{F} = (1, 2t, -2 + 4t^2, -12t + 8t^3).$$

a) Montrer que $\mathcal{F}$ forme une base de $\mathbb{P}_3$.
b) Quelles sont les coordonnées $[y(t)]_{\mathcal{F}}$ du polynôme $y(t) = 7 - 12t - 8t^2 + 12t^3$?

Remarque. Les polynômes de Hermite sont utiles lors de l'étude d'équations différentielles que l'on rencontre dans des problèmes de physique. Ils se construisent facilement à l'aide de relations de récurrence.

Exercice 21

Trouver la dimension du sous-espace H défini par :

$$H = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} a - 3b + 6c \\ 5a + 4d \\ b - 2c - d \\ 5d \end{pmatrix}, \text{ où } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 22

Soient

$$\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5/2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si $\overrightarrow{w}$ est dans ImA, dans Ker$A$ ou bien dans les deux.

Réponses de certains exercices:

Ex-9 $[\overrightarrow{y}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>Exercices additionnels</u>
