Série 7

Cette série fait suite aux chapitres 1.3, 1.4, 1.5 Mots-clés : *Matrice triangulaire, déterminant*

Remarques :

1. La série est volontairement longue, il n'est pas indispensable de la finir en une semaine. Vous pouvez sauter certains exercices, et les aborder pendant les vacances, ou pendant les séances de révision.
2. Il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.
3. Il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Montrer qu'un produit de matrices $n \times n$ triangulaires supérieures est triangulaire supérieur.

Exercice 2

a) Calculer le déterminant des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Même question pour A^T, B^T, C^T, D^T, E^T.

Exercice 3

Calculer, en faisant le moins de calculs possible, les déterminants des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Pour quelles valeurs de c_1, c_2, c_3 la matrice suivante est-elle inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \end{pmatrix}$$

Indication : Montrer que $\det A = (c_2 - c_1)(c_3 - c_1)(c_3 - c_2)$.

Exercice 5

Soit A une matrice $n \times n$. Montrer que si deux lignes de A sont identiques, alors $\det(A) = 0$. Que peut-on dire si deux colonnes sont identiques ?

Exercice 6

Sachant que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7,$$

calculer les déterminants

$$t = \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \quad s = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Exercice 7

Montrer que

a) si A est une matrice inversible, alors $\det(A^{-1}) = 1/\det A$,

b) si A et P sont des matrices carrées, avec P inversible, alors $\det(PAP^{-1}) = \det A$,

c) si U est une matrice carrée telle que $U^T U = I$ (on dit que U est une matrice *orthogonale*), alors $\det U = \pm 1$;

d) si A est une matrice carrée telle que $\det(A^4) = 0$, alors A ne peut pas être inversible.

Exercice 8

1. Soient A, B deux matrices $n \times n$. Prouver les affirmations suivates ou trouver un contre-exemple
   a) A ou B sigulière $\Rightarrow AB$ singulière
   b) AB inversible $\Rightarrow A$, B inversibles
2. Soient A, B deux matrices. Prouver ou trouver un contre-exemple

$$AB \text{ inversible} \Rightarrow A,\ B \text{ inversibles}$$

Exercice 9

Calculer l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 10

Calculer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Si B est obtenue en intervertissant deux lignes de A, alors $\det B = \det A$.	☐	☐
b) Si les colonnes de A sont linéairement dépendantes, alors $\det A = 0$.	☐	☐
c) Le déterminant de A est le produit des éléments diagonaux de A.	☐	☐
d) Soit A une matrice carrée telle que $\det(A^{13}) = 0$. Alors A est inversible.	☐	☐

Exercice 12

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Si deux lignes d'une matrice A de taille 7×7 sont les mêmes, alors $\det A = 0$.	☐	☐
b) Si A est une matrice carrée dont le déterminant vaut 2, alors $\det(A^3) = 6$.	☐	☐
c) Si A et B sont des matrices de taille $n \times n$ telles que $\det A = 2$ et $\det B = 5$, alors $\det(A + B) = 7$.	☐	☐
d) Si A est une matrice carrée triangulaire inférieure, alors A est inversible.	☐	☐

Exercice 13

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Si une matrice A est triangulaire inférieure, alors son déterminant s'obtient comme le produit des éléments de sa diagonale.	☐	☐
b) $\det A^T = -\det A$ pour toute matrice carrée A.	☐	☐
c) Il se peut que l'inverse d'une matrice A existe même si $\det A = 0$.	☐	☐
d) Soient A une matrice $n \times n$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors, $\det(kA) = k^n \det A$.	☐	☐

Exercice 14

a) Soit A et B deux matrices inversibles de taille 3×3. On forme la matrice C en multipliant la 3ème ligne de A par 5, puis la 2ème colonne de cette matrice par -3. On définit la matrice $D = C \cdot 2B$. Alors

☐ $\det D = 30 \det A \det B$;

☐ $\det D = -60 \det A \det B$;

☐ $\det D = 90 \det A \det B$;

☐ $\det D = -120 \det A \det B$.

b) Soit A et B deux matrices inversibles de taille 3×3. On obtient la matrice C à partir de A en multipliant par 4 la matrice A, puis en échangeant les lignes 1 et 2. On obtient la matrice D à partir de B en multipliant par 4 la deuxième colonne et en ajoutant 4 fois la première colonne à la troisième.

☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -4 \det A \cdot (\det B)^{-1}$;

☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -\det A \cdot (\det B)^{-1}$;

☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -16 \det A \cdot (\det B)^{-1}$;

☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -\frac{1}{4} \det A \cdot (\det B)^{-1}$.

Exercice 15

Soit a un paramètre réel et A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Alors A est singulière si

☐ $a \notin \{1, -1\}$

☐ $a \in \{1, -1\}$

☐ $a \in \{1, 3\}$

☐ $a \notin \{1, 3\}$

Exercices additionnels

Exercice 16

Montrer qu'une matrice X (2×2) qui commute avec toutes les matrices A (2×2) est un multiple de l'identité, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X = \lambda I_n$.

Indication : Poser $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, puis utiliser quelques matrices A bien choisies.

Exercice 17

Soit A une matrice $n \times n$ telle que $A^3 = 0$. Montrer que $I_n - A$ est inversible et que son inverse est donné par $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2$.

Exercice 18

Soit A est une matrice carrée triangulaire supérieure de taille $n \times n$.

1. Démontrer que si A est inversible, alors l'inverse A^{-1} est aussi une matrice carrée triangulaire supérieure. on pourra se baser sur la méthode d'inversion basée sur l'algorithme de Gauss.
2. Sous quelle(s) condition(s) une matrice triangulaire supérieure est-elle inversible ? On s'intéressera aux coefficients diagonaux.

Exercice 19

Soient A et B des matrices de taille $n \times n$. Montrer que si A ou B est non inversible, alors AB est non inversible.

Exercice 20

a) Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

b) Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a+b & c \\ a & b & a \end{vmatrix}.$$

c) Calculer le déterminant de la matrice suivante. Comment le déterminant dépend t-il de l'angle φ ? Pourquoi ?

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

d) Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 18 & 17 & 23 \\ 49 & 1 & 72 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 18 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(AB)$.

Exercice 21

Montrer :

a) Si A est une matrice inversible, alors $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.
b) Si A et Q sont des matrices inversibles de taille $n \times n$, alors $\det(QAQ^{-1}) = \det A$.
c) Si U est une matrice carrée de taille $n \times n$ telle que $U^T U = I_n$, alors $\det U = \pm 1$.
d) Si A est une matrice carrée telle que $\det A^3 = 0$, alors A est non inversible.

Exercice 22

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ et E une matrice élémentaire de taille $n \times n$. Montrer que $\det(EA) = \zeta \det A$, où

$$\zeta = \begin{cases} 1 & \text{si } E \text{ représente l'opération "addition sur une ligne de} \\ & A \text{ d'un multiple d'une autre ligne de } A\text{";} \\ -1 & \text{si } E \text{ permute deux lignes de } A; \\ \alpha & \text{si } E \text{ multiplie une ligne de } A \text{ par } \alpha \neq 0. \end{cases}$$

On fera la preuve de ce théorème **sans** utiliser le fait que $\zeta = \det E$.

Exercice 23

a) Soient $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ est la même que l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2 + c\,\vec{a}_1$, où $c \in \mathbb{R}$ est un scalaire.
b) Montrer que si A est une matrice de taille 2×2, alors l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs colonnes de A est égale à $|\det A|$.
Indications : Se rappeler que $A = (A^T)^T$ *et que* $\det A^T = \det A$*, et essayer de se ramener au cas des matrices diagonales.*

Exercice 24

Montrer "à la main" que pour deux matrices 2×2 quelconques, A et B,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)\,.$$

Exercice 25

Calculer les déterminants des matrices $n \times n$ ci-dessous.

$$X_n := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Y_n := \begin{bmatrix} 1 & n & n & \cdots & \cdots & n \\ n & 2 & n & \ddots & & n \\ n & n & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ n & n & \cdots & \cdots & n & n \end{bmatrix}$$

Réponses de certains exercices:

<u>Exercices additionnels</u>

Ex-20

a) 11
b) 0, a^3
c) 1
d) 0
