

Série 6

Cette série fait suite aux chapitres 1.3, 1.4, 1.5 Mots-clés : *Calcul matriciel, matrice élémentaire, inverse de matrice, matrices par blocs*

Remarques :

1. La série est volontairement longue, il n'est pas indispensable de la finir en une semaine. Vous pouvez sauter certains exercices, et les aborder pendant les vacances, ou pendant les séances de révision.
2. Il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.
3. Il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

On considère les matrices élémentaires de taille 4×4 .

- a) Donner la matrice élémentaire qui permet de permuter les lignes 2 et 4.
- b) Donner la matrice élémentaire qui ajoute cinq fois la ligne 1 à la ligne 3.
- c) Donner la matrice élémentaire qui multiplie la ligne 3 par 17.
- d) Donner les inverses des matrices trouvées aux questions a), b) et c).

Exercice 2

- a) Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
 - (i) en utilisant la formule générale de l'inverse d'une matrice 2×2 ;
 - (ii) en mettant la matrice $(A \ I_2)$ sous forme échelonnée réduite.
- b) Calculer l'inverse de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ en mettant la matrice $(B \ I_3)$ sous forme échelonnée réduite.

Exercice 3

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles (essayer d'utiliser le moins de calculs possible, justifier votre réponse).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 7 & 14 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Calculer les produits suivants en utilisant la multiplication par bloc :

a)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \right)$$

b)

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$$

c)

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$$

Exercice 5

Soient A_{11} et A_{22} des matrices carrées.

a) On suppose que A_{11} est inversible. Déterminer X, Y et S satisfaisant

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

où le produit matriciel de droite est compatible avec la multiplication par bloc.

b) On suppose que A_{11} et A sont inversibles. Montrer que S est inversible.

Remarque : La matrice S est appelée le *complément de Schur*.

Exercice 6

Calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -6 & 13 \end{pmatrix},$$

puis utiliser le résultat précédent pour résoudre le système

$$\begin{aligned} 3x - 7y &= -4 \\ -6x + 13y &= 1. \end{aligned}$$

Exercice 7

Déterminer lesquelles des matrices suivantes sont inversibles. Utiliser le moins de calculs possible et justifier votre réponse. On ne demande pas le calcul de l'inverse !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \\ -1 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

Soit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer C^2 et montrer que C^3 est la matrice nulle. On dit que C est *nilpotente*.
2. Montrer sans faire de calculs explicites que $I_3 + C + C^2$ est l'inverse de la matrice $(I_3 - C)$.
3. Trouver l'inverse (explicite cette fois !) de la matrice $I - C$.
4. Soit $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Trouver les solutions de l'équation $\vec{x} = C\vec{x} + \vec{b}$ en échelonnant la matrice augmentée $(I - C \mid \vec{b})$.
5. Résoudre la même équation que ci-dessus en utilisant la formule $\vec{x} = (I - C)^{-1}\vec{b}$.

Exercice 9

Calculer l'inverse des matrices ci-dessous

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- | | V | F |
|--|--------------------------|--------------------------|
| a) Soient A , B et C trois matrices. Alors $(AB)C = (AC)B$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Si A est une matrice inversible, alors A^{-1} l'est aussi. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) Le produit de plusieurs matrices inversibles de taille $n \times n$ n'est pas inversible. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

- d) Si A est une matrice inversible de taille $n \times n$, alors l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est compatible quel que soit $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. □ □

Exercice 11

- a) Les matrices sont de taille $n \times n$.
- Soient A, B deux matrices telles que A ou B n'est pas inversible. Alors AB n'est pas inversible.
 - Il existe une matrice A inversible et une matrice B qui ne l'est pas telles que AB est inversible.
 - Soient A, B deux matrices inversibles, alors $A + B$ est inversible.
 - Soient A, B deux matrices inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.
- b) Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$.
- Alors $(AB)^T = A^T B^T$.
 - Alors $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ si A est inversible.
 - Si $m = n$ et $A = A^T$, alors A est diagonale.
 - Si $m = n = p$, $A = A^T$ et $B = B^T$, alors $(AB)^T = AB$.
- c) Une matrice C de taille 2×2 vérifie $AC = CA$ pour toute matrice A de taille 2×2 si et seulement C est diagonale.
- Une matrice C de taille 2×2 vérifie $AC = CA$ pour toute matrice A de taille 2×2 si et seulement C est scalaire, i.e. $C = \lambda I$, où I est la matrice identité et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Soient A, C deux matrices 2×2 telles que $AC = CA$. Alors A est diagonale ou C est diagonale.
- Soient A, C deux matrices 2×2 telles que $AC = CA$. Alors A est scalaire ou C est scalaire.
- d) Soit A une matrice de taille 7×8 et T l'application linéaire définie par $T\vec{x} = A \cdot \vec{x}$. Alors \vec{x} est un vecteur de
- \mathbb{R}^7
 - \mathbb{R}^8
 - \mathbb{R}^{15}
 - \mathbb{R}^{56}
- e) Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$.
- Alors BA est une matrice $n \times n$.
 - Alors A^T est une matrice $m \times n$.
 - Alors A représente une application linéaire $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

□ Alors $(AB)^T$ est une matrice $p \times m$.

f) Soient A, B, C trois matrices $n \times n$.

□ Si $AC = BC$, alors $A = B$.

□ Si A est inversible et $AC = BC$, alors $A = B$.

□ Si $C = C^{-1}$ et $AC = BC$, alors $A = B$.

□ Si $C = C^T$ et $AC = BC$, alors $A = B$.

g) Soit A une matrice carrée et a un nombre réel. Alors

□ $A + I$ est inversible.

□ $(A - I)(A + I) = A^2 - I$.

□ $(A + I)(A + I) = A^2 + I$.

□ $(aA)^2 = a(A^2)$.

Exercices additionnels

Exercice 12

Soient A et B des matrices telles que le produit AB soit bien défini. Montrer que $(AB)^T = B^T A^T$.

Exercice 13

a) Soit A une matrice anti-symétrique de taille $n \times n$. Montrer que

i) pour toute matrice B de taille $n \times n$ anti-symétrique, $A + B$ est anti-symétrique ;

ii) si A est inversible, alors A^{-1} est anti-symétrique.

b) Calculer la décomposition en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique, des matrices M de taille 3×3 suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14

a) Montrer que l'inverse de la matrice

$$L_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & & \vdots \\ & & & -l_{i+1,i} & & \\ & & & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -l_{n,i} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

est donné par

$$L_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & & \vdots \\ & & & l_{i+1,i} & & \\ & & & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & l_{n,i} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Montrer que le produit de deux matrices $L_i, L_j, i < j$ est donné par

$$L_i L_j = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ \vdots & & -l_{i+1,i} & \ddots & & & & \\ & & \vdots & & 1 & & & \\ \vdots & & \vdots & & -l_{j+1,j} & & & \\ & & & & \vdots & \ddots & & \\ 0 & -l_{n,i} & & -l_{n,j} & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Montrer que

$$L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 1 & 0 \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15

a) Montrer qu'une matrice partitionnée triangulaire inférieure

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

avec A_{11} matrice de taille $n \times n$ et A_{22} matrice de taille $m \times m$, est inversible si et seulement si A_{11} et A_{22} sont inversibles.

b) Montrer que les matrices partitionnées

$$U = \begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

où I est la matrice identité $n \times n$, sont toujours inversibles. Donner l'inverse.

Exercice 16

Calculer les produits matriciels suivants :

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3); \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 2); \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} (1 \ 3 \ 5).$$

En déduire le théorème suivant : Si A est une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$, alors le produit AB peut être obtenu par la formule colonne-ligne suivante :

$$AB = \text{col}_1(A)\text{lig}_1(B) + \cdots + \text{col}_n(A)\text{lig}_n(B), \quad (1)$$

où $\text{col}_k(A)$ est la matrice $m \times 1$ correspondant à la $k^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A , et $\text{lig}_k(B)$ est la matrice $1 \times p$ correspondant à la $k^{\text{ème}}$ ligne de la matrice B .

Souvenez-vous de cette propriété du produit matriciel : on l'a utilisée en conjonction avec le théorème spectral et avec le théorème de la décomposition en valeurs singulières pour écrire une matrice A comme une somme de plusieurs matrices simples : $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i \vec{v}_i^\top$ (pour une matrice symétrique) et $A = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^\top$ (pour une matrice quelconque). Faites explicitement le lien avec cet exercice.

Exercice 17

Déterminer l'ensemble des valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ pour les quelles les matrices suivantes sont inversibles. Ensuite, donner l'inverse de la matrice considérée pour ces valeurs de λ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & \lambda \\ 3 & 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 18

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 5/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB , puis AC . Qu'observez-vous ?

Réponses de certains exercices:

Ex-3 B, C, D

Ex-4 $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & \\ 5 & 4 & \\ 1 & 2 & \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{array} \right), \text{ et } \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & \\ 4 & 8 & \end{array} \right)$

Exercices additionnels

Ex-17 $\lambda \neq 0$ pour la matrice A et $\lambda \neq \frac{1}{2}$ pour la matrice B .