Série 4

Cette série fait suite aux chapitres 1.3, 1.4, 1.5 Mots-clés : *Espace engendré, dépendance et indépendance linéaire, application linéaire*

Remarques :

1. La série est volontairement longue, il n'est pas indispensable de la finir en une semaine. Vous pouvez sauter certains exercices, et les aborder pendant les vacances, ou pendant les séances de révision.
2. Il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.
3. Il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ? Engendrent-ils $\mathbb{R}^3$ (questions a) et b)) ou $\mathbb{R}^2$ (question c)) ?

a) $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

b) $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

c) $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$

Exercice 2

L'assertion suivante est-elle correcte (justifier) ?

Tout ensemble de vecteurs $\{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_p\}$ de $\mathbb{R}^n$ est linéairement dépendant si $p > n$.

Exercice 3

Trouver les matrices associées à chacune des transformations linéaires suivantes

a) $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{T}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{T}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$

b) $\mathbf{T}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, \mathbb{T}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{T}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\mathbf{T}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

c) $\mathbf{R}\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ est la rotation d'axe Oz et d'angle 60^o (dans le sens trigonométrique).

Exercice 4

a) Déterminer si les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants.

b) Déterminer si les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$ engendrent $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Les colonnes d'une matrice A sont linéairement indépendantes si l'équation $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$ admet la solution triviale.	☐	☐
b) Si A possède des colonnes linéairement dépendantes, alors l'équation $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$ admet une solution non triviale.	☐	☐
c) Les colonnes de toute matrice de taille 4×5 sont linéairement dépendantes.	☐	☐
d) Si le vecteur nul est l'un des vecteurs d'une famille $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \dots, \overrightarrow{v}_p)$, alors ces vecteurs sont linéairement indépendants.	☐	☐

Exercice 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils se trouvent sur une même droite qui passe par l'origine.	☐	☐
b) Si un ensemble comporte moins de vecteurs que le nombre de composantes de ceux-ci, alors il est linéairement indépendant.	☐	☐
c) Une équation homogène est toujours compatible.	☐	☐
d) Si $\overrightarrow{x}$ est une solution non triviale de $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$, alors aucune composante de $\overrightarrow{x}$ est nulle.	☐	☐

Exercice 7

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Si une matrice A est de taille $m \times n$ alors l'image de la transformation $\overrightarrow{x} \mapsto A\overrightarrow{x}$ est contenue dans $\mathbb{R}^n$. ☐ ☐
b) Chaque transformation linéaire est une transformation matricielle. ☐ ☐
c) La transformation $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = mx^2 + b$ est linéaire pour $b = 0$. ☐ ☐
d) Une transformation linéaire préserve les opérations d'addition vectorielle et de multiplication par un scalaire. ☐ ☐
e) Chaque transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ est une transformation linéaire. ☐ ☐

Exercice 8

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Les vecteurs $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ sont linéairement dépendants pour tout choix de $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$. ☐ ☐
b) Un ensemble formé d'un seul vecteur est linéairement indépendant. ☐ ☐
c) Une matrice 6×4 doit posséder quatre pivots pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes. ☐ ☐
d) Les colonnes d'une matrice 3×4 engendrent $\mathbb{R}^3$. ☐ ☐

Exercice 9

Soit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ h \end{pmatrix}$$

☐ L'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est linéairement indépendant pour $h = -2$.
☐ Le vecteur $\mathbf{v}_2$ dépend linéairement des vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_3$ pour $h \neq 2$.
☐ L'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est linéairement indépendant pour $h \neq -2$.
☐ Le vecteur $\mathbf{v}_3$ dépend linéairement des vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ pour $h = 2$.

Exercice 10

Les vecteurs

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants si

☐ $b = 1$ ☐ $b = 2$ ☐ $b = 3$ ☐ $b = 4$

Exercice 11

Décrire quelle est la forme échelonnée réduite dans les cas suivants :

a) A est une matrice 3×3 avec des colonnes linéairement indépendantes.

b) A est une matrice 4×2, $A = (\overrightarrow{a}_1 \quad \overrightarrow{a}_2)$ et $\overrightarrow{a}_2$ n'est pas un multiple de $\overrightarrow{a}_1$.

c) A est une matrice $4{\times}3$, $A = (\overrightarrow{a}_1 \quad \overrightarrow{a}_2 \quad \overrightarrow{a}_3)$. Les vecteurs $\overrightarrow{a}_1$ et $\overrightarrow{a}_2$ sont linéairement indépendants, et $\overrightarrow{a}_3$ n'est pas une combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}_1$ et $\overrightarrow{a}_2$.

Exercice 12

Trouver les matrices correspondant aux transformations linéaires suivantes (exprimées dans la base canonique) :

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Exercice 13

Décrire géométriquement la transformation linéaire suivante : $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$T(\overrightarrow{u}) = A\overrightarrow{u} \qquad \text{où } A = \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}.$$

Indication : Calculer les images de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par T.

<u>Exercices additionnels</u>

Exercice 14

Prouver le théorème suivant :

Un ensemble $\{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $p \geqslant 2$ est linéairement dépendant si et seulement si au moins un vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Exercice 15

Prouver l'affirmation suivante :

Soit l'ensemble $\{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_p}\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si $p < n$ alors l'ensemble ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 16

Déterminer toutes les valeurs possibles des nombres a, b, c, d et e pour lesquelles la matrice suivante est sous forme échelonnée-réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & c & 1 & d & 3 \\ 0 & e & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 17

Déterminer les valeurs des paramètres réels a, b et c pour lesquelles le système d'équations

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + u = a \\ x + 3y - 2z + u = b \\ x - 7y + 8z + u = c \end{cases}$$

possède des solutions. Déterminer ces solutions.

Indication : résoudre le système $A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{b}$ *avec* $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Exercice 18

Écrire les systèmes linéaires suivant sous la forme $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$. Déterminer dans chaque cas si les colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes.

a) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -7x_1 + 37x_2 + 119x_3 = 0 \\ 5x_1 + 19x_2 + 57x_3 = 0 \end{cases}$

Exercice 19

a. Combien de colonnes pivots une matrice 7×5 doit-elle posséder pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes ?

☐ Moins de 5, ☐ 5 exactement, ☐ 7 exactement, ☐ entre 5 et 7.

b. Combien de colonnes pivots une matrice 5×7 doit-elle posséder pour que ses colonnes engendrent $\mathbb{R}^5$?

☐ Moins de 5, ☐ 5 exactement, ☐ 7 exactement, ☐ entre 5 et 7.

c. L'application linéaire du plan $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ est

☐ une rotation ☐ une translation ☐ une projection orthogonale ☐ une homothétie

Exercice 20

Considérer les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} h+7 \\ 8 \\ 2h+1 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\vec{v}_3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ lorsque

☐ $h = 2$ ☐ $h = 4$ ☐ $h = 1$ ☐ $h = -2$

Exercice 21

a) Les colonnes de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 10 & -7 & 1 \\ -5 & -5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

forment-elles un ensemble de vecteurs linéairement dépendants ?

b) Les polynômes $1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3$ sont-ils linéairement dépendants ?

Exercice 22

Le système linéaire suivant où a est un paramètre réel

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z &= 1 \\ \phantom{2x+{}} 2y + 2z &= 1 - 2a \\ 2x + 4ay + 2z &= 1 \\ 4x + 4ay + 2z &= 1 + 2a \end{cases}$$

☐ possède une solution unique lorsque $a = 1/2$
☐ ne possède aucune solution lorsque $a \neq 1/2$
☐ possède une infinité de solutions lorsque $a = 1/2$
☐ ne possède aucune solution lorsque $a = 1/2$

Exercice 23

a) Les vecteurs $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont-ils linéairement dépendants ?

b) Les vecteurs $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ engendrent-ils $\mathbb{R}^3$?

c) Les vecteurs $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ engendrent-ils $\mathbb{R}^4$?

Réponses de certains exercices:

Ex-4

1. oui
2. oui

<u>Exercices additionnels</u>

Ex-17

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(3a+2b) \\ \frac{1}{5}(b-a) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{pour tout } s, t \in \mathbb{R}.$$

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, Orane Pouchon, Jerôme Scherer, José Luis Zuleta,...). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.