Série 3

Cette série fait suite aux chapitres 1.2-1.3 Mots-clés : *variables libres, variables liéesvecteurs, équations vectorielles, combinaisons linéaires, espace engendré, équations matricielles*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

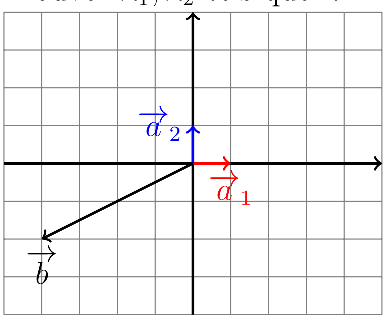
Exercice 1

Ecrire le vecteur $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

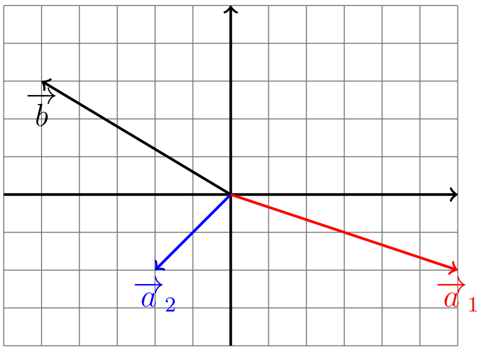
Exercice 2

À l'aide des graphes ci-dessous, trouver les coefficients des combinaisons linéaires demandées. Il se peut qu'il existe plusieurs solutions, ou aucune solution. Dans les graphes ci-dessous, un carré =1 unité.

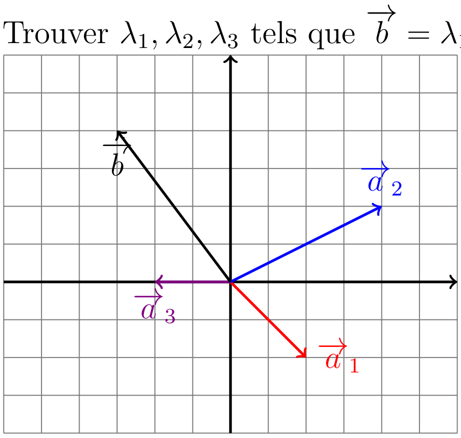
a) Trouver λ_1, λ_2 tels que $\overrightarrow{b} = \lambda_1 \overrightarrow{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{a}_2$



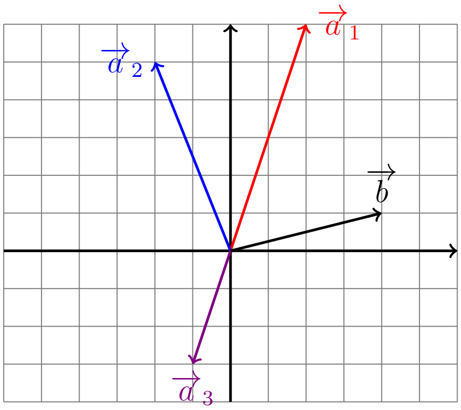
b) Trouver λ_1, λ_2 tels que $\overrightarrow{b} = \lambda_1 \overrightarrow{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{a}_2$



c) Trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\overrightarrow{b} = \lambda_1 \overrightarrow{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{a}_2 + \lambda_3 \overrightarrow{a}_3$



d) Trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\overrightarrow{b} = \lambda_1 \overrightarrow{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{a}_2 + \lambda_3 \overrightarrow{a}_3$. Peut-on trouver μ_1 et μ_3 tels que $\overrightarrow{b} = \mu_1 \overrightarrow{a}_1 + \mu_3 \overrightarrow{a}_3$?



Exercice 3

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Est-il possible d'écrire $\overrightarrow{b}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}_1$ et $\overrightarrow{a}_2$?

b) Donner une interprétation géométrique du résultat.

Exercice 4

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de α le vecteur $\overrightarrow{b}$ est-il une combinaison linéaire de $\overrightarrow{a}_1$ et $\overrightarrow{a}_2$?

Exercice 5

Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6. \end{cases}$$

a) Écrire le système sous forme matricielle $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.
b) Écrire le système comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A.
c) Trouver la solution de l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.
d) Subsidiaire : écrire l'ensemble des solutions en fonction d'un paramètre.

Exercice 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) En appliquant différentes opérations (licites) sur les lignes d'une matrice, on obtient des formes échelonnées réduites différentes.	☐	☐
b) Une variable de base d'un système linéaire est une variable qui correspond à un pivot dans une colonne.	☐	☐
c) La dernière colonne d'une matrice augmentée peut faire office de colonne pivot.	☐	☐
d) Un système n'est compatible que lorsque chaque colonne contient un pivot.	☐	☐

Exercice 7

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Si une forme échelonnée d'une matrice augmentée possède [0 0 0 0 5] comme ligne, alors le système est incompatible.	☐	☐
b) Il existe plusieurs formes échelonnées d'une matrice augmentée.	☐	☐
c) À chaque fois que l'on a une variable libre dans un système linéaire, le système possède une infinité de solutions.	☐	☐
d) Une solution générale d'un système est une description explicite de toutes les solutions du système.	☐	☐

Exercice 8

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Le système d'équations linéaires homogène représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est compatible.	☐	☐

b) Le système d'équations linéaires inhomogène représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est compatible. ☐ ☐

c) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible. ☐ ☐

d) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible. ☐ ☐

e) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible. ☐ ☐

f) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible. ☐ ☐

Exercice 9

Calculer $A(\alpha_1 \overrightarrow{v}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{v}_2)$, où

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3;$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1.$$

Exercice 10

Écrire les solutions des systèmes $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ suivants sous la forme $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{p} + \overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{p}$ est une solution particulière du système, et $\overrightarrow{v}$ est la solution générale du système homogène $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

Exercice 11

Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ? Engendrent-ils $\mathbb{R}^3$ (questions a) et b)) ou $\mathbb{R}^2$ (question c)) ?

a) $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 12

a) Déterminer si les vecteurs $(1, 2, 3)$, $(2, 0, 0)$ et $(-2, 1, 0)$ engendrent $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer si les vecteurs $(2, -1, 2)$, $(4, 1, 3)$ et $(2, 2, 1)$ engendrent $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Montrer que les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$ *si et seulement si* la forme échelonnée de la matrice A a une position pivot dans chaque ligne.

Exercice 14

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecrire l'ensemble solution de l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ sous forme paramétrique vectorielle.

Exercice 15

Soit span$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\}$ avec

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Laquelles des informations suivantes est correcte ?

- ☐ Le span ne contient aucun vecteur de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ Le span contient tous les vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ Le vecteur $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est dans le span.
- ☐ Le span contient une infinité de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 16

Soit $\text{span}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ avec

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Laquelles des informations suivantes est correcte ?

- ☐ $\text{span}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\} = \mathbb{R}^3$.
- ☐ Le $\text{span}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ est une droite.
- ☐ Le $\text{span}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ est un plan.
- ☐ Le $\text{span}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ ne contient que $\overrightarrow{0}$.

Exercice 17

a. Combien de colonnes pivots une matrice 7×5 doit-elle posséder pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes ?

☐ Moins de 5, ☐ 5 exactement, ☐ 7 exactement, ☐ entre 5 et 7.

b. Combien de colonnes pivots une matrice 5×7 doit-elle posséder pour que ses colonnes engendrent $\mathbb{R}^5$?

☐ Moins de 5, ☐ 5 exactement, ☐ 7 exactement, ☐ entre 5 et 7.

c. L'application linéaire du plan $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ est

☐ une rotation ☐ une translation ☐ une projection orthogonale ☐ une homothétie

Exercice 18

Lors de l'échelonnement de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

la colonne qui ne possède pas de pivot est la

- ☐ première
- ☐ deuxième
- ☐ troisième
- ☐ quatrième

Exercice 19

Considérer les vecteurs

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} h+7 \\ 8 \\ 2h+1 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{v}_3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ lorsque

☐ $h = 2$ ☐ $h = 4$ ☐ $h = 1$ ☐ $h = -2$

<u>Exercices additionnels</u>

Exercice 20

Écrire les solutions des systèmes $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ suivants sous la forme $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{p} + \overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{p}$ est une solution particulière du système, et $\overrightarrow{v}$ est la solution générale du système homogène $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

a) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 8 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 5x_3 & = & 14 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 4x_3 & = & 19 \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array} \right.$

Exercice 21

a) Soient les vecteurs

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}.$$

i) Pour quelle(s) valeur(s) de h le vecteur $\overrightarrow{w}$ peut-il être obtenu comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$?

ii) Dans ce cas quels sont les coefficients respectifs a_1, a_2 des vecteurs $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$?

b) Le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$, se trouve-t-il dans le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les colonnes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$

Justifiez votre réponse.

Exercice 22

Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Montrer que l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ n'est pas compatible pour tout vecteur $\overrightarrow{b}$ de $\mathbb{R}^2$. Trouver et décrire l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{b}$ pour lesquels $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ est compatible.

Exercice 23

Pour les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donner cinq vecteurs qui appartiennent à $\text{span}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$. Pour chaque vecteur, donner les coefficients de la combinaison linéaire.

Exercice 24

Soient $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Donner une interprétation géométrique de $\text{span}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$.

b) Est-ce que $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est dans le $\text{span}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$?

Exercice 25

Donner une matrice A de taille 3×3 à coefficients non-nuls (tous !) et un vecteur $\overrightarrow{b}$ de $\mathbb{R}^3$, tels que $\overrightarrow{b}$ n'appartienne pas à $\text{span}\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}\}$ où $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ sont les colonnes de A.

Exercice 26

Déterminer les valeurs du nombre réel a pour lesquelles le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ \quad\;\; y + az = 2 \\ (a^2 - 4)z = a - 2 \end{cases}$$

possède des solutions. Déterminer ces solutions.

Réponses de certains exercices:

Ex-2

a) $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -2$

b) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1/2$

c) infinité de solutions.

d) infinité de solutions. Non on ne peut pas trouver de μ_1 et μ_3 tels que $\overrightarrow{b}$ soit une comb. linéaire de $\overrightarrow{a}_1$ et $\overrightarrow{a}_3$, car ces ils sont colinéaires.

Ex-4 $\alpha = -\frac{7}{2}$

Ex-9

a) $A(\alpha_1 \overrightarrow{v}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{v}_2) = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix}$.

b) $A(\alpha_1 \overrightarrow{v}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{v}_2) = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ex-10

a)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Pas de solution

Ex-14 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $s, t, u \in \mathbb{R}$

Exercices additionnels

Ex-20

1.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. incompatible

Ex-21 $h = -9$