Série 2

Cette série fait suite aux chapitres 1.1 Systèmes d'équations linéaires.

Mots-clés : *Gauss-Jordan, formes échelonnées, formes échеonnées-réduites*

Cette collection d'exercices est longue, pour vous permettre de vous exercer plus. Nous n'attendons pas de vous que vous puissiez les terminer tous en deux heures, mais elle vous permettra de vous entraîner en calculs.

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

i) Écrire les matrices augmentées correspondant aux systèmes linéaires suivants.

ii) Résoudre ces systèmes linéaires en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes de ces matrices augmentées.

a) $$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 3 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 12 \\ x_3 & + & 2x_1 & - & 4x_2 & = & -1 \\ x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_1 & = & -8 \end{array}\right.$$

c) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -4 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \end{array}\right.$$

d) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & & & = & 5 \\ 5x_3 & - & x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 2

a) Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée puis sous forme échelonnée réduite.

b) Supposons que ces matrices sont des matrices augmentées de systèmes linéaires. Déterminer dans chaque cas si le système linéaire possède exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

a) Vérifier si les matrices suivantes sont sous forme échelonnée ou sous forme échelonnée réduite.
b) Identifier les variables de bases (ou principales) et les variables libres.
c) Déterminer si les systèmes linéaires correspondant possèdent exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

Pour chacun des systèmes suivants :

i) Écrire la matrice augmentée.
ii) Transformer la matrice augmentée sous forme échelonnée réduite.
iii) Identifier les variables de bases et les variables libres, et écrire la solution générale.

a) $\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 8 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & = & 6 \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{rcrrrcr} x_1 & + & 2x_2 & & & = & 1 \\ & & & x_3 & & = & 2 \\ & & & & x_4 & = & -1 \end{array} \right.$

d) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array} \right.$

e) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \end{array} \right.$

Exercice 5

Laquelle des colonnes de la matrice suivante n'est pas une colonne-pivot ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

☐ la première,
☐ la deuxième,
☐ la troisième,

☐ la quatrième.

Exercice 6

Soit $a \in \mathbb{R}$. A l'aide de l'algorithme de réduction (ou de Gauss-Jordan), déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles le système

$$\begin{cases} ax + (1-a)y + (1-a)z &= a^2 \\ ax + (1+a)y + (1+a)z &= a - a^2 \\ x + y + z &= 1 - a \end{cases}$$

a) n'admet aucune solution,
b) admet une infinité de solutions,
c) admet une solution unique.

Ensuite résoudre le système dans les cas b) et c).

Exercice 7

Trouver la solution générale du système d'équations linéaires homogènes

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4u = 0 \\ 4x + 5y + 6z + 7u = 0 \\ 4x + 2y \qquad - 2u = 0 \\ x - \ y - 3z - 5u = 0 \end{cases}$$

Exercice 8

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Un système d'équations linéaires avec trois équations à 5 inconnues admet au moins une solution. ☐ ☐
b) Un système d'équations linéaires avec cinq équations à 3 inconnues n'admet aucune solution. ☐ ☐
c) L'équation $\sqrt{2}x + \pi y - z = 1$ est une équation linéaire à trois inconnues. ☐ ☐
d) L'équation $2\sqrt{x} + \pi y - z = 1$ est une équation linéaire à trois inconnues. ☐ ☐
e) L'équation $\cos x = 0$ est une équation linéaire à une inconnue. ☐ ☐
f) L'équation $x = 1$ est une équation linéaire à une inconnue, les équations $y = -1$ et $z = 5$ également, mais le système d'équations

$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= -1 \\ z &= 5 \end{cases}$$

est un système linéaire de trois équations à trois inconnues. ☐ ☐

Exercice 9

Le système linéaire suivant où a est un paramètre réel

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x+2y+2z & =1 \\ 2y+2z & =1-2a \\ 2x+4ay+2z & =1 \\ 4x+4ay+2z & =1+2a \end{array}\right.$$

- ☐ possède une solution unique lorsque $a=1/2$
- ☐ ne possède aucune solution lorsque $a \neq 1/2$
- ☐ possède une infinité de solutions lorsque $a=1/2$
- ☐ ne possède aucune solution lorsque $a=1/2$

Exercice 10

Déterminer si les systèmes linéaires homogènes suivants ont une solution non triviale.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 5x_2 & + & 8x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 7x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 9x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -7x_1 & + & 37x_2 & + & 119x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 19x_2 & + & 57x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 11

a) Résoudre le système suivant en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée correspondante :

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2-x_3 &= 12, \\ x_3+2x_1-4x_2 &= -1, \\ x_2+2x_3-4x_1 &= -8. \end{aligned} \tag{1}$$

b) Mettre la matrice suivante sous forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12

Soit x, y, z des inconnues. On considère le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x + \cos y + 2\cos z &= 3 \\ 2\cos x - 2\sqrt{2}\cos y + 2\cos z &= 1 - \sqrt{2} \\ \cos x + \cos y - \sqrt{2}\cos z &= 1 \end{cases}$$

En posant $X = \cos x$, $Y = \cos y$ et $Z = \cos z$, et en substituant dans le système original, on obtient un système d'équations linéaires aux inconnues X, Y et Z. Utiliser l'algorithme de Gauss pour résoudre ce système et ensuite en déduire les valeurs de x, y et z dans l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$ qui satisfont au système initial.

Exercice 13

Pour chacun des systèmes suivants

1. $\begin{cases} x + y + 2z + 3w &= 13 \\ x - 2y + z + w &= 8 \\ 3x + y + z - w &= 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + y + z - 2w &= 1 \\ 3x - 2y + z - 6w &= -2 \\ x + y - z - w &= -1 \\ 6x + z - 9w &= -2 \\ 5x - y + 2z - 8w &= 3 \end{cases}$

a) Écrire la matrice augmentée correspondante (pour l'ordre des inconnues x, y, z, w).
b) Mettre cette matrice sous forme échelonnée réduite.
c) Déterminer la solution générale du système.

Exercice 14

Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 18 \\ x + 2y + z = 13 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

possède une solution unique telle que

- ☐ $z = 2$
- ☐ $z = 3$
- ☐ $z = 4$
- ☐ $z = 5$

Exercice 15

Lors de l'échelonnement de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

la colonne qui ne possède pas de pivot est la

- ☐ première
- ☐ deuxième
- ☐ troisième
- ☐ quatrième

Exercice 16

Soit R la matrice échelonnée-réduite associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nous avons

☐ $r_{14} = 6$ ☐ $r_{14} = 5$ ☐ $r_{14} = 3$ ☐ $r_{14} = 2$

Exercice 17

a) Pour quelle valeur de h la matrice suivante est-elle la matrices augmentée d'un système linéaire compatible (consistant) :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{array}\right)$$

- ☐ $h = 5$,
- ☐ $h = 5/2$,
- ☐ $h \neq 5/2$,
- ☐ $h = -5/2$.

b) Même question pour la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{array}\right).$$

- ☐ $h = 2$,
- ☐ $h = -2$,
- ☐ $h \neq 2$,
- ☐ $h \neq -2$.

Réponses de certains exercices:

Ex-1

a) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$

b) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$
c) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$
d) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$

Ex-7

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{pour tout } s, t \in \mathbb{R}.$$

Ex-11 $x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1.$

Ex-12 $x = \frac{\pi}{4}, y = 0$ et $z = \frac{\pi}{3}$.