Série 1 (Corrigé)

Exercice 1

Parmi les équations suivantes, déterminer celles qui sont linéaires.

a) $x_1^2 + x_2^2 = 1$
b) $2^2 x_1 + 2^2 x_2 = 1$
c) $\sqrt{3}x_1 + \left(1-\sqrt{2}\right) x_2 + 3 = \pi x_1$
d) $3x_1 + 2x_2 + 4\, x_3\, x_4 = 5$
e) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) x_1 - 2 = 2x_1 + 4x_2 + \sqrt{3}\, x_3 + x_9$

Sol.:

a) non (x_1^2 et x_2^2 sont non-linéaires)
b) oui
c) oui
d) non ($x_3\, x_4$ est non-linéaire)
e) oui

Exercice 2

Considérons l'équation suivante

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = 1.$$

a) Dessiner la solution avec les paramètres $\alpha = 1$, $\beta = 3$.
b) Pour quelles valeurs de α, β la droite $\alpha x_1 + \beta x_2 = 1$ est-elle parallèle à la droite $-x_1 + x_2 = -1$?
c) Trouver les valeurs de α, β (si elles existent) telles que le système

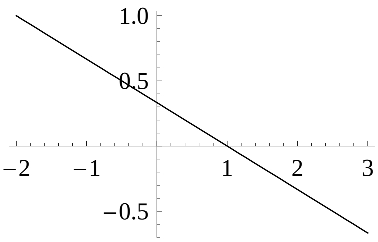
$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & x_2 & = & -1 \\ \alpha x_1 & + & \beta x_2 & = & 1 \\ (\alpha-1)\, x_1 & + & (\beta+1)\, x_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

i) possède une infinité de solutions ;
ii) ne possède aucune solution ;
iii) possède une solution unique.

Sol.:

a)

$$x_2 = \frac{1}{3}\,(1 - x_1)$$



b) Les droites sont parallèles lorsque les vecteurs normaux aux droites $(\alpha,\, \beta)$ et $(-1,\, 1)$ sont proportionnels i.e. $-\alpha = \beta$, avec $(\alpha,\, \beta) \neq 0$ (pour que la droite existe).

c) Méthode 1 : On constate que l'équation 1 + l'équation 2 nous donne l'équation 3. Ainsi cette denière ne nous donne pas de nouvelles informations. On a alors le système

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 & = -1 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 & = 1 \end{cases}$$

En mutlipliant l'équation par α (en supposant que $\alpha \neq 0$)on obtient

$$\begin{cases} -\alpha x_1 + \alpha x_2 & = -\alpha \\ \alpha x_1 + \beta x_2 & = 1 \end{cases} \to \begin{cases} -\alpha x_1 + \alpha x_2 & = -\alpha \\ \alpha x_1 + \beta x_2 & = 1 \end{cases}$$

Méthode 2(avec l'algo de Gauss-Jordan) : En faisant $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 + \alpha L_1$, on obtient la forme échelonnée de la matrice augmentée :

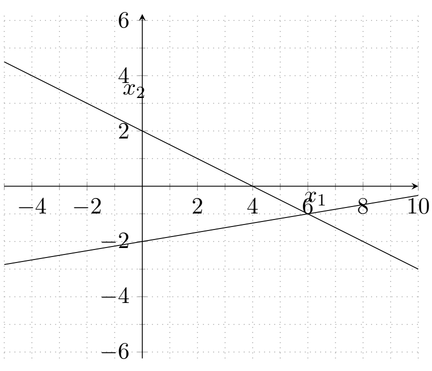
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & \alpha+\beta & -\alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\alpha + \beta \neq 0$, le système linéaire possède une unique solution. Si $\alpha + \beta = 0$, le système est dit dégénéré. On a alors deux cas possibles : si $-\alpha + 1 \neq 0$ le système ne possède aucune solution (système incompatible) ; si $-\alpha+1 = 0$ (i.e. $\alpha = 1, \beta = -1$) alors x_2 est une variable libre et il existe une infinité de solutions.

Exercice 3

Soient les deux droites d'équations respectives $\frac{1}{2}x_1 - 3x_2 = 6$ et $x_1 + 2x_2 = 4$. Représenter graphiquement les deux équations dans un systèmes d'axes x_1 et x_2 et déterminer le point d'intersection de ces deux droites

Sol.: Le point d'intersection est $(6; -1)$.



Exercice 4

Remplisser les informations manquantes pour chaque système ci-dessous.

a) $m =$ ___ équations et $n =$ ___ variables

$$\begin{cases} 3x_1 + \quad 4x_3 &= 5 \\ \quad x_2 &= 2 \end{cases} \quad \text{avec coefficients} \quad \begin{matrix} a_{11} = \_\_\_, & a_{12} = \_\_\_, & a_{13} = \_\_\_ \\ a_{21} = \_\_\_, & a_{22} = \_\_\_, & a_{23} = \_\_\_ \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} b_1 = \_\_\_ \\ b_2 = \_\_\_ \end{matrix}$$

Vérifier que $(-2, 2, \frac{11}{4})$ est une solution du système linéaire. Est- ce que $(-2, 1, \frac{11}{4})$ est une solution du système linéaire ?

b) $m =$ ___ équations et $n =$ ___ variables

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 &= -\frac{1}{2} \\ 2x_1 - x_2 &= -5 \end{cases} \quad \text{avec coefficients} \quad \begin{matrix} a_{11} = \_\_\_, & a_{12} = \_\_\_ \\ a_{21} = \_\_\_, & a_{22} = \_\_\_ \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} b_1 = \_\_\_ \\ b_2 = \_\_\_ \end{matrix}$$

Donner la/les solution(s) du système si elles existent.

c) $m =$ ___ équations et $n =$ ___ variables

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{cases} \quad \text{avec coefficients} \quad \begin{matrix} a_{11} = \_\_\_, & a_{12} = \_\_\_ \\ a_{21} = \_\_\_, & a_{22} = \_\_\_ \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} b_1 = \_\_\_ \\ b_2 = \_\_\_ \end{matrix}$$

Vérifier que $(2, 1)$ est une solution du système linéaire. Donner la/les solution(s) du système s'il y'en a d'autres.

d) $m =$ ___ équations et $n =$ ___ variables

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + \frac{1}{3}x_2 &= \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{avec coefficients} \quad \begin{matrix} a_{11} = \_\_\_, & a_{12} = \_\_\_ \\ a_{21} = \_\_\_, & a_{22} = \_\_\_ \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} b_1 = \_\_\_ \\ b_2 = \_\_\_ \end{matrix}$$

Donner la/les solution(s) du système si elles existent.

Sol.:

a) Non ce n'est pas une solution.

b) il n'y a pas de solutions.

c) Il n'y a qu'une solution.

d) Ce système a une infinité de solutions.

Exercice 5

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Toutes les opérations élémentaires sur les lignes sont réversibles.	☐	☐
b) Une matrice de taille 5×6 a 6 lignes.	☐	☐
c) L'ensemble des solutions d'un système linéaire dans les variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ est une liste de nombres $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ qui, substitués à $x_1, x_2, \dots, x_n$ respectivement, rendent correcte chaque équation du système.	☐	☐

d) L'existence et l'unicité d'une solution sont deux questions fondamentales pour un système linéaire. ☐ ☐

Sol.:

a) Vrai, en effet échanger deux lignes est une opération réversible (il suffit d'échanger de nouveau les mêmes lignes) ; multiplier une ligne par un nombre non-nul est une opération réversible (il suffit de multiplier la même ligne par l'inverse de ce nombre) et ajouter à une ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j est une opération réversible car il suffit d'enlever à L_i le même multiple de L_j.

b) Faux. Par convention, une matrice de taille $n \times m$ possède n lignes et m colonnes.

c) Vrai, c'est la définition de l'ensemble des solutions d'une système linéaire à n variables : chaque équation doit être satisfaite par $(s_1, \ldots, s_n)$.

d) Vrai. En général, c'est la structure/description de l'ensemble des solutions d'un système linéaire qui est cruciale pour la compréhension de celui-ci.

Exercice 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice augmentée ne changent jamais l'ensemble des solutions du système linéaire associé. ☐ ☐

b) Un système incompatible a plus d'une solution. ☐ ☐

Sol.:

a) Vrai. Il suffit de s'en rendre compte pour chaque type d'opération élémentaire. Par exemple, échanger deux lignes (équations) ne change clairement pas l'ensemble des solutions du système. Multiplier une ligne par un facteur non-nul, ne change pas les solutions (par contre multiplier par 0 une ligne change radicalement le système) et le dernier cas se vérifie aisément.

b) Faux. Un système incompatible peut avoir aucune solution.
