Série 13

Mots-clés : *Produit scalaire, matrices symétriques*

Remarques :

1. Il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.
2. Il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Soit V une espace euclidien. On note $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$ et la norme associée est $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle}$. Par exemple, considérez que $V = \mathbb{R}^n$ et on utilise le produit scalaire habituel $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}^\top \overrightarrow{v}$.

Montrer :

a) Si $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est une famille orthonormale, alors $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| = \sqrt{2}$.

b) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right)$ pour tous $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$.

c) $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = 2\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$ pour tous $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$.

Exercice 2

Soit A une matrice $n \times n$ inversible. Montrer que la formule $(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}) = (A\overrightarrow{u}) \cdot (A\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^T A^T A \overrightarrow{v}$ définit un produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3

Soit $V = C[-1,1] = \{f : [-1,1] \to \mathbb{R}; f \text{ continue}\}$. On munit V du produit scalaire

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt.$$

Déterminer une base orthonormale du sous-espace vectoriel de V suivant :

$$\mathbb{P}_2 = \operatorname{span}\left\{1, t, t^2\right\}.$$

Exercice 4

Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 4u_1v_1 + 5u_2v_2.$$

Soient $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix}$. Calculez $\|\vec{v}_1\|$ et $\|\vec{v}_2\|$, ainsi que $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$

Exercice 5

Chercher une décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes.

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$,

ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

Soit A une matrice de taille $n \times n$.

i) Montrer que A est inversible si et seulement si A possède n valeurs singulières non nulles.

ii) Si A est inversible et $U\Sigma V^T$ est une décomposition en valeurs singulières de A, donner une décomposition en valeurs singulières de A^{-1}.

Exercice 7

On suppose que A est une matrice symétrique réelle de taille $n \times n$.

a) Montrer qu'il existe une base orthonormale $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (pas forcément distincts) tels que

$$A = \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \lambda_2 \vec{u}_2 \vec{u}_2^T + \ldots + \lambda_n \vec{u}_n \vec{u}_n^T. \tag{1}$$

Cette expression est appelée décomposition spectrale de A.

b) Calculer la décomposition spectrale et vérifier l'égalité (**??**) pour

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ii) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 8

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser A en base orthonormée.

Note : on ne vous demande pas d'être capable de trouver les racines d'un polynôme général de degré 3 ou plus à l'examen ; ici, pour l'exercice, trouvez les racines par essai-erreur et demandez aux assistant.es si cela vous empêche de progresser.

Exercice 9

Chercher une décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 10

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Et soit $A = U\Sigma V^T$ une décomposition en valeurs singulières (U est une matrice orthogonale de taille $m \times m$ et V une matrice orthogonale de taille $n \times n$). Montrer que les matrices U et V ne sont pas uniques en général mais que la matrice Σ est unique.

Exercice 11

Soit A une matrice symétrique inversible. Montrer qu'alors l'inverse de A est aussi symétrique.

Contrairement au solutionnaire, on vous recommande ici d'utiliser le théorème spectral.

Exercice 12

Trouver une décomposition en valeurs singulières des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Réponses de certains exercices:
