

Série 12

Mots-clés : *Méthode des moindres carrés, matrices symétriques*

Remarques :

1. **La série est volontairement plus courte que d'habitude, pour vous laisser le temps de réfléchir à certains exercices de la semaine passée**
2. Il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.
3. Il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Déterminer la solution au sens des moindres carrés de $A\vec{x} = \vec{b}$

a) en utilisant l'équation normale lorsque

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$;

b) en utilisant la méthode QR lorsque

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

On considère les points

x_i	2	5	6	8
y_i	1	2	3	3

On suppose que la relation entre les x_i et les y_i suit une loi $y = ax + b$. Calculer a et b au sens des moindres carrés.

Exercice 3

Déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite de régression correspondant aux points $(3, 2)$, $(-1, 2)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$.

Exercice 4

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta,$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs à l'origine.

Indication utiliser la loi des cosinus : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$ où a, b, c sont les longueurs des cotés d'un triangle et γ est l'angle opposé au côté de longueur c .

Exercice 5

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

- Montrer que $A\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot A\vec{u}$ pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
- Donner un contre-exemple à a) pour une matrice carrée quelconque, en trouvant une matrice B de taille 2×2 telle que $B\vec{v} \cdot \vec{u} \neq \vec{v} \cdot B\vec{u}$ en général.

Exercice 6

Diagonaliser les matrices suivantes sous la forme $A = QDQ^T$, avec Q une matrice orthogonale.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Exercice 7

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- L'ensemble des solutions au sens des moindres carrés de $A\vec{x} = \vec{b}$ coïncide avec l'ensemble non vide des solutions de l'équation normale $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$.
- Soit A une matrice $m \times n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Le problème général des moindres carrés consiste à trouver un $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ qui rend $A\vec{x}$ aussi proche que possible de \vec{b} .

Exercice 8

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- Soit A une matrice $n \times n$ qui peut se factoriser selon la factorisation QR comme $A = QR$. Alors, $Q^T A = R$.
- Soit W un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Soit \hat{y} la projection orthogonale de $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ sur W . Alors \hat{y} dépend du choix de la base de W .
- Soit W un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, tel que $W = \text{Span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$. Si $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ satisfait $\vec{z} \perp \vec{w}_1$ et $\vec{z} \perp \vec{w}_2$, alors $\vec{z} \in W^\perp$.
- Soit W un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Si $\vec{y} \in W$, alors sa projection orthogonale sur W est $\vec{p}_W(\vec{y}) = \vec{y}$.

Exercice 9

Les données suivantes décrivent le potentiel dans un câble électrique en fonction de la température du câble.

i	T_i [$^\circ\text{C}$]	U_i [V]
1	0	-2
2	5	-1
3	10	0
4	15	1
5	20	2
6	25	4

On suppose que le potentiel suit la loi $U = a + bT + cT^2$. Calculer a, b, c au sens des moindres carrés.

Remarque : Cet exercice n'est pas à résoudre entièrement à la main.

Réponses de certains exercices:

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, Orane Pouchon, ...). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.