Série 11

Cette série fait suite aux chapitres 1.3, 1.4, 1.5 Mots-clés : *Produit scalaire, orthogonalité*

Remarques :

1. La série est volontairement longue, il n'est pas indispensable de la finir en une semaine. Vous pouvez sauter certains exercices, et les aborder pendant les vacances, ou pendant les séances de révision.
2. Il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.
3. Il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

a) Trouver un vecteur non nul orthogonal à $\overrightarrow{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}, \quad \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}, \quad \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{v}\|}, \quad \frac{1}{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w}}\overrightarrow{w}, \quad \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}.$$

c) Calculer la distance entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et la distance entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$.

d) Calculer les vecteurs unitaires correspondant à $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ (pointant dans la même direction que le vecteur original).

Exercice 2

Soit $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner l'ensemble W des vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{v}$. Est-ce un espace vectoriel ? Si oui, de quelle dimension ?

Exercice 3

Soient $\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ sont orthogonaux.
b) Calculer la projection orthogonale $\overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{v})$ de $\overrightarrow{v}$ sur $W = \text{Span}\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$.
c) Donner la décomposition $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{z} + \overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{v})$, où $\overrightarrow{z} \in W^{\perp}$.

Même question pour $\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Même question pour $\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Soient $\{\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n\}$ et $\{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n\}$ deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$. On définit les matrices de taille $n \times n$, $U = (\overrightarrow{u}_1 \ldots \overrightarrow{u}_n)$ et $V = (\overrightarrow{v}_1 \ldots \overrightarrow{v}_n)$. Montrer que $U^T U = I_n$, $V^T V = I_n$ et que UVest inversible.

Exercice 5

Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser les bases de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ suivantes.

L'exercice ne vous demande que de calculer une base orthogonale (pas nécessairement orthonormée) et c'est aussi que ce que le solutionnaire vous propose. Vous pouvez bien sur calculer une base orthonormée (car elle est orthogonale en particulier). Ceci a l'avantage d'également révéler la factorisation QR comme vu en classe.

a) $\{\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2\}$ base d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, avec $\overrightarrow{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\{\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \overrightarrow{w}_3\}$ base d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$, avec $\overrightarrow{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Donner une base orthonormale pour a) et b).

Exercice 6

Calculer la décomposition QR des matrices suivantes.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\overrightarrow{v}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\overrightarrow{v}_2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

1. Calculer et décrire $W^{\perp}$.
2. Vérifier que $\dim(W) + \dim(W^{\perp)} = 4$.

Exercice 8

Soit $\text{proj}_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection sur le sous-espace W de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0\,, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = 0\,. \end{cases}$$

1. Donner la matrice associée à cette projection.
2. Soit A le point dont les coordonnées sont $(3, 11, -1)$. Calculer les coordonnées de la projection orthogonale de A sur W.

Exercice 9

Soit $A = (\overrightarrow{a}_1 \ldots \overrightarrow{a}_n)$ une matrice $m \times n$ dont les colonnes sont linéairement indépendantes. Soient $Q = (\overrightarrow{q}_1 \ldots \overrightarrow{q}_n)$ et $R = (\overrightarrow{r}_1 \ldots \overrightarrow{r}_n)$ les matrices obtenues de la factorisation QR.

a) Montrer que $\overrightarrow{a}_i = r_{1i}\overrightarrow{q}_1 + r_{2i}\overrightarrow{q}_2 + \ldots r_{ii}\overrightarrow{q}_i$. On obtient que les colonnes de A sont des combinaisons linéaires des colonnes de Q avec comme coefficients les composantes de R.
(**Indication** : utilisez $\overrightarrow{a}_i = Q\overrightarrow{r}_i$)

b) Trouver la factorisation QR de la matrice A ci-dessous, en utilisant le point précédant pour trouver la matrice R.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : pour trouver R on peut aussi utiliser $R = Q^T A$ mais ici vous voyez une manière alternative.

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Soit $\|.\|$ la norme euclidienne. Alors pour un vecteur $\overrightarrow{v}$, $\|c\overrightarrow{v}\| = c\,\|\overrightarrow{v}\|$ quel que soit le scalaire c. ☐ ☐

b) Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\,\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\| + \|\overrightarrow{v}\|^2 .$$

☐ ☐

c) Si un vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonal à tous les vecteurs sauf un d'une base d'un sous-espace W, alors $\overrightarrow{v}$ appartient à $W^{\perp}$. ☐ ☐

d) Soit W un sous-espace d'un espace vectoriel V. Si la dimension de l'espace $W^{\perp}$ est égale à 1, alors on peut trouver une base de V formée par des vecteurs de W. ☐ ☐

Exercice 11

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Une base d'un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^n$ qui est un ensemble de vecteurs orthogonaux est appelée une base orthonormale. ☐ ☐

b) Un ensemble $S = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_p\}$ orthogonal de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ est linéairement indépendant et de ce fait est une base du sous-espace qu'il engendre. ☐ ☐

c) Une base orthonormale est une base orthogonale mais la réciproque est fausse en général. ☐ ☐

d) Si $\overrightarrow{x}$ n'appartient pas au sous-espace vectoriel W, alors $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{x})$ n'est pas nul (ici $\overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{x})$ désigne la projection orthogonale de $\overrightarrow{x}$ sur W. ☐ ☐

Exercice 12

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Tout ensemble orthonormal de $\mathbb{R}^n$ est linéairement dépendant.

b) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $\overrightarrow{v}$ est dans W et dans $W^{\perp}$, alors $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

c) Si U est une matrice $m \times n$ avec des colonnes orthonormales, alors $U^T U \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}\ \ \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$.

d) Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de dimension p $(0 < p \leqslant n)$, alors la méthode de Gram-Schmidt produit, à partir d'une base $\{\overrightarrow{x}_1, \ldots, \overrightarrow{x}_p\}$ de W, une base $\{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_p\}$ avec $\|\overrightarrow{v}_i\| = 1, \forall i \in \{1, \ldots, p\}$.

<u>Exercices additionnels</u>

Exercice 13

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $\{\overrightarrow{w}_1, \ldots, \overrightarrow{w}_q\}$ une base orthogonale de W. Soit $\{\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_r\}$ une base orthogonale de $W^{\perp}$.
Montrer que $\{\overrightarrow{w}_1, \ldots, \overrightarrow{w}_q, \overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_r\}$ est orthogonale et prouver la relation

$$\dim W + \dim W^{\perp} = n.$$

Exercice 14

Soit U un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\{\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_p\}$ une base orthogonale de U. On considère la transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $T(\overrightarrow{v}) = \mathrm{proj}_{\mathrm{U}}(\overrightarrow{v})$. Montrer que T est une transformation linéaire.

Indication : utiliser la définition de la projection orthogonale.

Exercice 15

Soit A une matrice de taille $m \times n$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}(A^T A)$.

b) Montrer que $A^T A$ est inversible si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Exercice 16

a) Montrer que si Q est une matrice orthogonale, alors Q^T est aussi une matrice orthogonale.

b) Montrer que si U, V sont des matrices $n \times n$ orthogonales, alors UV est aussi une matrice orthogonale.

c) Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ ($\|\overrightarrow{u}\| = 1$). Montrer que la matrice $Q = I_n - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T$ est orthogonale.

d) Montrer que toute valeur propre réelle λ d'une matrice orthogonale Q vérifie $\lambda = \pm 1$.

e) Soit Q une matrice orthogonale de taille $n \times n$. Soit $\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_n\}$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\{Q\overrightarrow{u}_1, ..., Q\overrightarrow{u}_n\}$ est aussi une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 17

i) Soit $\{u_1, ..., u_n\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et v un vecteur dans $\mathbb{R}^n$. Montrer

$$\|v\|^2 = |v \cdot u_1|^2 + ... + |v \cdot u_n|^2 .$$

ii) (Inégalité de Bessel) Soit $\{u_1, ..., u_p\}$ une famille orthonormée dans $\mathbb{R}^n$ et soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer

$$\|v\|^2 \geq |v \cdot u_1|^2 + ... + |v \cdot u_p|^2 .$$

Exercice 18

Soit $W \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel muni d'une base orthogonale, et $\mathrm{proj}\, W$ la projection orthogonale associée. Montrer (sans utiliser la représentation de $\mathrm{proj}\, W$ à l'aide d'une matrice) que

1. $\overrightarrow{v} \mapsto \mathrm{proj}\, W(\overrightarrow{v})$ est linéaire.
2. $\mathrm{proj}\, W(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$ si et seulement si $\overrightarrow{v} \in W$.

3. $\operatorname{proj} W \circ \operatorname{proj} W = \operatorname{proj} W$.

Réponses de certains exercices:

Exercices additionnels