

Série 10

Cette série fait suite aux chapitres 1.3, 1.4, 1.5 Mots-clés : *Changement de base, matrice d'une application linéaire, vecteur propre, valeur propre*

Remarques :

1. La série est volontairement longue, il n'est pas indispensable de la finir en une semaine. Vous pouvez sauter certains exercices, et les aborder pendant les vacances, ou pendant les séances de révision.
2. Il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.
3. Il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -15 & 1 & -9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- a) Est-ce que $\lambda = 6$ est une valeur propre de A ?
- b) Même question avec $\lambda = 1$ et $\lambda = -9$.

Exercice 2

Déterminer lesquelles, parmi les matrices suivantes, sont diagonalisables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Démontrer ou trouver un contre-exemple. Soient $n \geq 2$ et $k \geq 2$ entiers.

- a) Si A est une matrice $n \times n$ diagonalisable, alors A^k est diagonalisable.
- b) Si A est une matrice $n \times n$ et A^k est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

Exercice 4

Existe-t-il une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $b \neq 0$, diagonalisable et ne possédant qu'une seule valeur propre de multiplicité 2?

Exercice 5

Soit A une matrice de taille 2×2 et $\vec{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

- Montrer que le système $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ a une solution non nulle si et seulement si la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
- Dès maintenant $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A\vec{x}$.
- Trouver pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
- Montrer que les deux valeurs trouvées ci-dessus sont des valeurs propres de A .
- Calculer les espaces propres correspondants aux deux valeurs propres.

Exercice 6

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que 0 et 6 sont des valeurs propres de A et calculer les espaces propres associés.

Exercice 7

- Est-ce que $\lambda = 4$ est une valeur propre de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$? Si oui, trouver un vecteur propre pour cette valeur propre.
- Est-ce que $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$?
- Trouver une base de l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 3$ de la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. Quelle est la dimension de cet espace propre?

Exercice 8

Soit $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2 , dont une base est donnée par $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, S_3\}$ où

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $T : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ la transformation linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - d & -b \\ -b & -a + 2d \end{pmatrix}.$$

- a) Calculer les 3 valeurs propres (distinctes) $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ de T .
- b) Trouver un vecteur propre $M_i \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ associé à chaque λ_i . Montrer que $\mathcal{B}' = \{M_1, M_2, M_3\}$ est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
- c) Ecrire la matrice de T par rapport à la base \mathcal{B}' .
- d) Calculer $T^{10}(A)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A = PDP^{-1}$; ensuite, utiliser cette expression pour donner une expression simple pour A^k , pour un entier positif k quelconque.

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Une matrice A carrée n'est pas inversible si et seulement si 0 est une valeur propre de A .
- b) Une matrice A carrée est inversible si et seulement si elle est diagonalisable.
- c) Les valeurs propres d'une matrice carrée sont sur sa diagonale.
- d) On trouve les valeurs propres de A en réduisant la matrice à sa forme échelonnée.

Exercice 11

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Si A et B sont deux matrices semblables, alors elles ont les mêmes valeurs propres.
- b) Pour qu'une matrice $n \times n$ soit diagonalisable il faut qu'elle ait au moins n valeurs propres distinctes.
- c) Si v_1 et v_2 sont deux vecteurs propres linéairement indépendants, alors leur valeurs propres associées sont différentes.
- d) Soient A , B et C trois matrices de même taille. Si A est semblable à B , et B est semblable à C , alors A est semblable à C .

Exercice 12

Soit A une matrice de taille $n \times n$. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (justifier).

V F

- a) A est diagonalisable si et seulement si elle possède n valeurs propres distinctes.

- b) A est diagonalisable si A possède n vecteurs propres.
- c) Si A est diagonalisable, alors A est inversible.
- d) Si A est inversible, alors A est diagonalisable.
- e) Si 0 est valeur propre, alors $\text{rang}(A) < n$.
- f) Pour toute matrice inversible P de taille $n \times n$, λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une valeur propre de $P^{-1}AP$.

Exercice 13

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- V F
- a) Un espace propre d'une matrice carrée A est l'espace nul d'une certaine matrice.
 - b) Soit A une matrice carrée. Si A^2 est la matrice nulle, alors la seule valeur propre de A est 0.
 - c) Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments de sa diagonale principale.
 - d) L'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ d'une matrice carrée A est linéairement dépendant.

Exercices additionnels

Exercice 14

Parmi les matrices suivantes, indiquer celles qui sont diagonalisables (toujours en justifiant), et le cas échéant, diagonaliser ces matrices et exhiber les vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15

Soit A une matrice de taille $n \times n$ et $k \geq 2$ un entier. Montrer que si λ est une valeur propre de A avec pour vecteur propre \vec{v} , alors λ^k est une valeur propre de

$$A^k = \underbrace{A A \cdots A}_{k \text{ fois}}$$

avec pour vecteur propre \vec{v} .

Exercice 16

- a) Montrer que si λ est une valeur propre d'une matrice inversible A de taille $n \times n$, alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1} . Trouver un vecteur propre correspondant.
- b) Montrer que A et A^T ont les mêmes valeurs propres. Montrer par un contre-exemple que les vecteurs propres de A et A^T ne sont pas les mêmes en général.

Exercice 17

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice de taille $n \times n$.

- a) On suppose que $a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} = \lambda$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Montrer que λ est une valeur propre de A . Quel est le vecteur propre associé?
- b) On suppose que $a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj} = \lambda$ pour tout $j = 1, \dots, n$. Montrer que λ est une valeur propre de A .

Exercice 18

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

- Calculer les valeurs propres de A .
- Calculer les vecteurs propres de A .
- Soit P la matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de A (associés à des valeurs propres *différentes*). Calculer $P^{-1}AP$, et interpréter le résultat.
- Calculer A^{1000} .

Exercice 19

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer ses valeurs propres.

Exercice 20

Toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a un polynôme caractéristique p_A qui peut s'écrire sous forme factorisée comme suit : $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les n valeurs propres de A (réelles ou complexes, et pas forcément toutes différentes).

Montrez que $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$. Avec des mots : le déterminant d'une matrice est égal au produit de ses valeurs propres (multiplicités comprises). Ceci est vrai pour toute matrice carrée (même si elle n'est pas diagonalisable).

Exercice 21

Soit W le sous-espace vectoriel de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ des matrices symétriques ($A = A^T$). On considère les matrices suivantes de W :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Utiliser la méthode de Gauss pour extraire de $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ une base de W .

Réponses de certains exercices:

Exercices additionnels

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, Orane Pouchon, Jérôme Scherer, Sacha Friedli, ...). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.