Durée : 60 minutes

Algèbre linéaire
Test intermédiaire
GC/SIE/SC
Automne 2025

Réponses

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Notations

– Pour une matrice A, a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
– Pour un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, x_i désigne la i-ème composante de $\vec{x}$.
– I_m désigne la matrice identité de taille $m\times m$.
– $\mathbb{P}_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
– $M_{m,n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m\times n$ à coefficients réels.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondant à la réponse correcte. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

possède une solution unique telle que

☐ $x_4 = \frac{1}{2}$ ■ $x_4 = -2$ ☐ $x_4 = 1$ ☐ $x_4 = -\frac{5}{2}$

Question 2 : Soit $\mathcal{B} = \big(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\big)$ une base ordonnée de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathcal{C} = \big(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\big)$ la base ordonnée de $\mathbb{R}^3$ formée des vecteurs

$$\vec{c}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2\,, \quad \vec{c}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_3 \quad \text{et} \quad \vec{c}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3\,.$$

Soit P la matrice de changement de base telle que $\big[\vec{v}\big]_{\mathcal{C}} = P\big[\vec{v}\big]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Alors

☐ $p_{23} = 0$ ☐ $p_{23} = 1$ ☐ $p_{23} = 2$ ■ $p_{23} = -\frac{2}{3}$

Question 3 : Soit $T\colon M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right) = b_{12} - (b_{11} + b_{22})t + b_{21}t^2\,.$$

Soient

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C} = \big(1,\, 1 + t^2,\, t + t^2\big)$$

des bases ordonnées de $M_{2,2}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{P}_2$ respectivement. La matrice A associée à T par rapport à la base $\mathcal{B}$ de $M_{2,2}(\mathbb{R})$ et la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{P}_2$, telle que $\big[T(B)\big]_{\mathcal{C}} = A\big[B\big]_{\mathcal{B}}$ pour tout $B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, satisfait

☐ $a_{12} = 3$ ■ $a_{12} = -4$ ☐ $a_{12} = -6$ ☐ $a_{12} = 2$

Question 4 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $B \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ définie par

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors

■ $\det(B) = \alpha^2(\alpha^2 - 4)$ ☐ $\det(B) = \alpha^2(\alpha - 1)^2$

☐ $\det(B) = \alpha(\alpha + 2)(\alpha - 1)^2$ ☐ $\det(B) = \alpha(\alpha + 1)(\alpha^2 - 4)$

Question 5 : Soit $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et soit $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - y - 5z \\ -2x + y + 7z \\ x - 2z \end{bmatrix}.$$

Alors

- ■ le vecteur $\vec{v}$ est dans $\mathrm{Im}(T)$ et dans $\mathrm{Ker}(T)$
- ☐ le vecteur $\vec{v}$ est dans $\mathrm{Ker}(T)$, mais pas dans $\mathrm{Im}(T)$
- ☐ le vecteur $\vec{v}$ est dans $\mathrm{Im}(T)$, mais pas dans $\mathrm{Ker}(T)$
- ☐ le vecteur $\vec{v}$ n'est ni dans $\mathrm{Ker}(T)$, ni dans $\mathrm{Im}(T)$

Question 6 : Soit a un nombre réel. Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} a\,x_1 + x_3 = 1 \\ a\,x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + a\,x_3 = 1 \\ x_2 + a\,x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 = a \end{cases}$$

possède exactement une solution si et seulement si

☐ $a \in \{-1, 1, -2\}$ ■ $a = -2$ ☐ $a \in \{-1, 1\}$ ☐ $a \in \{-2, 1\}$

Question 7 : Soit

$$A = \begin{bmatrix} \pi & 1 & 3 & 1 \\ 2\pi & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Alors l'inverse $B = A^{-1}$ de la matrice A est tel que

■ $b_{24} = 3$ ☐ $b_{22} = 1$ ☐ $b_{23} = 5$ ☐ $b_{21} = 7$

Question 8 : Soit W l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2. La deuxième coordonnée de la matrice $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in W$ dans la base ordonnée $\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)$ de W est

☐ -2 ☐ 1 ☐ $-\frac{3}{4}$ ■ $\frac{1}{4}$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Soient A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times m$. Si AB est inversible, alors A et B sont inversibles.

□ VRAI ■ FAUX

Question 10 : Le nombre de lignes non nulles dans la forme échelonnée réduite d'une matrice est égal à son rang.

■ VRAI □ FAUX

Question 11 : Soient V et W deux espaces vectoriels et soient T, $S \colon V \to W$ deux applications linéaires. Si $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(S)$, alors $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(S)$.

□ VRAI ■ FAUX

Question 12 : L'ensemble

$$\{p \in \mathbb{P}_n \mid p(1)\, p(2) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_n$.

□ VRAI ■ FAUX

Question 13 : Soit V un espace vectoriel et soient v_1, v_2, v_3 trois vecteurs de V. Si l'ensemble $\{v_1\,, v_2\,, v_3\}$ est linéairement indépendant, alors l'ensemble $\{v_1 - v_2\,, v_1 - v_3\,, v_2 - v_3\}$ est linéairement indépendant.

□ VRAI ■ FAUX

Question 14 : Soient A et B deux matrices de taille 3×3. Si $\det(A) = 2$, alors

$$\det(BA^{-1}B) = \frac{1}{2} \det(B)^2 .$$

■ VRAI □ FAUX

Question 15 : Si A est une matrice de taille $m \times n$ telle que $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^m$, alors pour tout choix de $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ possède une solution unique.

□ VRAI ■ FAUX

Question 16 : Soit V un espace vectoriel et soit $T \colon V \to \mathbb{R}$ une application linéaire. Si v_1, v_2, $v_3 \in V$ sont tels que

$$T(v_1) = 2\,, \quad T(v_2) = 3 \quad \text{et} \quad T(v_3) = 1\,,$$

alors $v_1 - v_2 + v_3$ est dans $\mathrm{Ker}(T)$.

■ VRAI □ FAUX