

# Algèbre linéaire

## Test intermédiaire

### GC/SIE/SC

### Automne 2025

---

## Énoncé

---

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- 1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 point si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- 1 point si la réponse est incorrecte.

## Notations

- Pour une matrice  $A$ ,  $a_{ij}$  désigne l'élément situé sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de la matrice.
- Pour un vecteur  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_i$  désigne la  $i$ -ème composante de  $\vec{x}$ .
- $I_m$  désigne la matrice identité de taille  $m \times m$ .
- $\mathbb{P}_n$  désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .
- $M_{m,n}(\mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des matrices de taille  $m \times n$  à coefficients réels.

## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondant à la réponse correcte. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

**Question 1 :** Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

possède une solution unique telle que

$x_4 = \frac{1}{2}$         $x_4 = -2$         $x_4 = 1$         $x_4 = -\frac{5}{2}$

**Question 2 :** Soit  $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$  une base ordonnée de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$  la base ordonnée de  $\mathbb{R}^3$  formée des vecteurs

$$\vec{c}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2, \quad \vec{c}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_3 \quad \text{et} \quad \vec{c}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3.$$

Soit  $P$  la matrice de changement de base telle que  $[\vec{v}]_{\mathcal{C}} = P[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$  pour tout  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ . Alors

$p_{23} = 0$         $p_{23} = 1$         $p_{23} = 2$         $p_{23} = -\frac{2}{3}$

**Question 3 :** Soit  $T: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2$  l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right) = b_{12} - (b_{11} + b_{22})t + b_{21}t^2.$$

Soient

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = (1, 1 + t^2, t + t^2)$$

des bases ordonnées de  $M_{2,2}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{P}_2$  respectivement. La matrice  $A$  associée à  $T$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$  de  $M_{2,2}(\mathbb{R})$  et la base  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{P}_2$ , telle que  $[T(B)]_{\mathcal{C}} = A[B]_{\mathcal{B}}$  pour tout  $B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ , satisfait

$a_{12} = 3$         $a_{12} = -4$         $a_{12} = -6$         $a_{12} = 2$

**Question 4 :** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $B \in M_{4,4}(\mathbb{R})$  définie par

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors

$\det(B) = \alpha^2(\alpha^2 - 4)$         $\det(B) = \alpha^2(\alpha - 1)^2$   
  $\det(B) = \alpha(\alpha + 2)(\alpha - 1)^2$         $\det(B) = \alpha(\alpha + 1)(\alpha^2 - 4)$

**Question 5 :** Soit  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$  et soit  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - y - 5z \\ -2x + y + 7z \\ x - 2z \end{bmatrix}.$$

Alors

- le vecteur  $\vec{v}$  est dans  $\text{Im}(T)$  et dans  $\text{Ker}(T)$
- le vecteur  $\vec{v}$  est dans  $\text{Ker}(T)$ , mais pas dans  $\text{Im}(T)$
- le vecteur  $\vec{v}$  est dans  $\text{Im}(T)$ , mais pas dans  $\text{Ker}(T)$
- le vecteur  $\vec{v}$  n'est ni dans  $\text{Ker}(T)$ , ni dans  $\text{Im}(T)$

**Question 6 :** Soit  $a$  un nombre réel. Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} ax_1 + x_3 = 1 \\ ax_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + ax_3 = 1 \\ x_2 + ax_4 = 1 \\ x_1 + x_3 = a \end{cases}$$

possède exactement une solution si et seulement si

- $a \in \{-1, 1, -2\}$
- $a = -2$
- $a \in \{-1, 1\}$
- $a \in \{-2, 1\}$

**Question 7 :** Soit

$$A = \begin{bmatrix} \pi & 1 & 3 & 1 \\ 2\pi & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Alors l'inverse  $B = A^{-1}$  de la matrice  $A$  est tel que

- $b_{24} = 3$
- $b_{22} = 1$
- $b_{23} = 5$
- $b_{21} = 7$

**Question 8 :** Soit  $W$  l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille  $2 \times 2$ . La deuxième coordonnée de

la matrice  $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in W$  dans la base ordonnée  $\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)$  de  $W$  est

- $-2$
- $1$
- $-\frac{3}{4}$
- $\frac{1}{4}$

## Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

**Question 9:** Soient  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  et  $B$  une matrice de taille  $n \times m$ . Si  $AB$  est inversible, alors  $A$  et  $B$  sont inversibles.

VRAI       FAUX

**Question 10:** Le nombre de lignes non nulles dans la forme échelonnée réduite d'une matrice est égal à son rang.

VRAI       FAUX

**Question 11:** Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels et soient  $T, S: V \rightarrow W$  deux applications linéaires. Si  $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(S)$ , alors  $\text{Im}(T) = \text{Im}(S)$ .

VRAI       FAUX

**Question 12:** L'ensemble

$$\{p \in \mathbb{P}_n \mid p(1)p(2) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{P}_n$ .

VRAI       FAUX

**Question 13:** Soit  $V$  un espace vectoriel et soient  $v_1, v_2, v_3$  trois vecteurs de  $V$ . Si l'ensemble  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est linéairement indépendant, alors l'ensemble  $\{v_1 - v_2, v_1 - v_3, v_2 - v_3\}$  est linéairement indépendant.

VRAI       FAUX

**Question 14:** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de taille  $3 \times 3$ . Si  $\det(A) = 2$ , alors

$$\det(BA^{-1}B) = \frac{1}{2} \det(B)^2.$$

VRAI       FAUX

**Question 15:** Si  $A$  est une matrice de taille  $m \times n$  telle que  $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^m$ , alors pour tout choix de  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ , le système  $A\vec{x} = \vec{b}$  possède une solution unique.

VRAI       FAUX

**Question 16:** Soit  $V$  un espace vectoriel et soit  $T: V \rightarrow \mathbb{R}$  une application linéaire. Si  $v_1, v_2, v_3 \in V$  sont tels que

$$T(v_1) = 2, \quad T(v_2) = 3 \quad \text{et} \quad T(v_3) = 1,$$

alors  $v_1 - v_2 + v_3$  est dans  $\text{Ker}(T)$ .

VRAI       FAUX