Algèbre Linéaire Avancée I – Math 110 (b)
Un résumé des principaux résultats théoriques

Dr. Aline Zanardini

aline.zanardini@epfl.ch

Automne 2025

Structures Algébriques

- Soit E un ensemble non vide et $\star : E \times E \to E$ une loi de composition interne. Si E possède un élément neutre pour la loi $\star$, alors cet élément est unique. Par ailleurs, si $\star$ est associative et E possède un élément neutre, alors chaque élément inversible de E a un unique inverse.
- Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme de groupes de $(A, *)$ dans $(B, \star)$, et soit encore $a \in A$. Alors
  (i) $\varphi(e_A) = e_B$,
  (ii) $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$
  (iii) et plus généralement pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $\varphi(a^n) = \varphi(a)^n$.
- Si $\varphi : A \to B$ est un morphisme de groupes de $(A, *)$ dans $(B, \star)$, alors $\ker(\varphi) \leq A$ et $\mathrm{im}(\varphi) \leq B$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier. Alors, tout élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ différent de $\overline{0}$ est inversible. Alors, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un corps. Souvent, on écrit $\mathbb{F}_p$ pour désigner le corps fini $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- Tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ est scindé.

Espaces Vectoriels

- Soit V un K-espace vectoriel et soient encore $\lambda \in K$ et $v \in V$. Alors,
  (i) $\lambda \cdot 0_V = 0_V$,
  (ii) $0_K \cdot v = 0_V$,
  (iii) $\lambda \cdot v = 0_V \Rightarrow (\lambda = 0_K) \vee (v = 0_V)$, et
  (iv) $(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$.
- Soient V un K-espace vectoriel et $\emptyset \neq W \subset V$. Alors W est un sous-espace de V si et seulement si pour tout $\lambda \in K$ et pour tous $u, v \in W$ on a que $\lambda u + v \in W$.
- Soient V un espace vectoriel sur un corps K et $U, W \subset V$ deux sous-espaces. Alors
  (i) $U \cap W$ est un sous-espace vectoriel de V et,
  (ii) également, $U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$ est un sous-espace vectoriel de V.

- Dans le cas où $U \cap W = \{0_V\}$ on parle de la **somme directe** de U et W et on écrit $U \oplus W$.

- Soient V un K-espace vectoriel et $X \subset V$ une partie de V. Considérons l'intersection de tous les sous-espaces de V qui contiennent le sous-ensemble X. On pose $\mathcal{S} := \{U \leq V \mid X \subset U\}$ et on considère :
$$\mathrm{Vect}(X) := \bigcap_{U \in \mathcal{S}} U.$$
On vérifie que $\mathrm{Vect}(X)$ est bien un sous-espace de V, appelé le sous-espace engendré par la partie X. En fait, on peut montrer que $\mathrm{Vect}(X)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de X.
- Soient $W_1, \ldots, W_k, U$ des sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel V avec $W_i \subset U$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Les conditions suivantes sont équivalentes :
  (i) $U = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$.
  (ii) Chaque vecteur $u \in U$ peut être écrit de façon unique comme $u = w_1 + \ldots + w_k$, avec $w_i \in W_i$ pour tout $1 \leq i \leq k$.

Bases et Dimensions

- Supposons $V \neq \{0\}$. Une partie $X \subset V$ est une base de V si et seulement si pour tout $v \in V \backslash \{0_V\}$ il existe un nombre fini de vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ (distincts) et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K^\times$, uniquement déterminés, tels que $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n$.
- Supposons que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ soit une base de V. Alors $V = \mathrm{Vect}(v_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Vect}(v_n)$.
- Supposons que $v_1, \ldots, v_m$ soient linéairement dépendants. Alors, il existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $v_k \in \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_{k-1})$. De plus, pour tel k, si le k-ième vecteur v_k est supprimé de $\{v_1, \ldots, v_m\}$, alors le sous-espace engendré par les vecteurs restants est égal à $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_m)$.
- Si $V \neq \{0\}$ est engendré par une partie finie $\{v_1, \ldots, v_n\}$, c.-à-d., s'il existe un nombre fini (> 0) de vecteurs $v_1, \ldots, v_n \in V$ tels que $V = Vect(v_1, \ldots, v_n)$, alors toute partie $X \subset V$ linéairement indépendante est finie et ne contient pas plus de n éléments. (c.-à-d., $|X| \leq n$).
- Si V est de dimension finie, deux bases quelconques de V ont le même nombre (fini) d'éléments.
- Si V est de dimension finie et $\dim(V) = n$, alors
  (i) chaque sous-ensemble de V contenant plus de n vecteurs est linéairement dépendant ;
  (ii) aucun sous-ensemble de V contenant moins de n vecteurs ne peut engendrer V.
- Soit $X \subset V$ un sous-ensemble linéairement indépendant. Supposons que w soit un vecteur de V qui ne soit pas dans le sous-espace engendré par X. Alors, l'ensemble $X \cup \{w\}$ obtenu en adjoignant w à X est linéairement indépendant.
- Supposons que V soit de dimension finie. Soit $L \subset V$ une partie libre (= linéairement indépendante). Alors, L peut être complété en une base de V. En plus, si $|L| = \dim V$, alors L est une base.
- Soit $W \leq V$ un sous-espace propre. Alors, W est de dimension finie et $\dim W < \dim V$. En plus, toute base de W peut être complétée en une base de V. En particulier, il existe $U \leq V$ tel que $V = U \oplus W$ et $\dim V = \dim U + \dim W$.

- Soit $\varphi : V \to W$ une application K-linéaire.
  (i) On a que $\varphi(0_V) = 0_W$, et
  (ii) $\varphi(\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n) = \lambda_1 \cdot \varphi(v_1) + \ldots + \lambda_n \cdot \varphi(v_n)$.
- Supposons que V soit un espace vectoriel de dimension finie sur le corps K. Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ une base ordonnée de V. Soit W un espace vectoriel sur le même corps K et soient $w_1, \ldots, w_n$ des vecteurs quelconques dans W. Alors, il existe exactement une application linéaire $\varphi : V \to W$ telle que $\varphi(v_i) = w_i$ pour tous $1 \leq i \leq n$.
- L'ensemble $\mathcal{L}(V, W)$ muni des opérations définies ci-dessus est un K-espace vectoriel. En plus, si $\dim(V) = n < \infty$ et $\dim(W) = m < \infty$, alors $\mathcal{L}(V, W)$ est de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(V, W)) = mn$.

Dans ce qui suit, soient K un corps, V et W des espaces vectoriels sur K, et $\varphi : V \to W$ une application K-linéaire.

- L'application φ est injective si et seulement si $\ker(\varphi) = \{0_V\}$.
- L'application φ est injective si et seulement si φ envoie chaque sous-ensemble linéairement indépendant de V en un sous-ensemble linéairement indépendant de W.

Théorème (Théorème du rang). *Supposons que V soit de dimension finie. Alors*

$$\dim(\mathrm{im}(\varphi)) + \dim(\ker(\varphi)) = \dim(V).$$

- Si $\dim(V) > \dim(W)$, alors $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ n'est pas injective.
- Si $\dim(V) < \dim(W)$, alors $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ n'est pas surjective.
- Supposons que V soit de dimension finie.
  (i) Si φ est bijective, alors W est aussi de dimension finie et $\dim(V) = \dim(W)$.
  (ii) Si W est aussi de dimension finie et $\dim(V) = \dim(W)$, alors φ est bijective si et seulement si φ est injective si et seulement si φ est surjective.
- Si V est de dimension finie avec $\dim(V) = n$, alors V est isomorphe à K^n.

Définition. Supposons que $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ soit une base ordonnée de V et $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ soit une base ordonnée de W. La matrice de φ par rapport à ces bases est la matrice dans $\mathbb{M}_{m\times n}(K)$, notée par $[\varphi]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, dont les coefficients a_{ij}sont définis par

$$\varphi(v_j) = a_{1,j} \cdot w_1 + \ldots + a_{m,j} \cdot w_m.$$

Si $V = W$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ on écrit simplement $[\varphi]_{\mathcal{B}}$.

Théorème. *La matrice $A_\varphi = [\varphi]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \in \mathbb{M}_{m\times n}(K)$ est telle que $[\varphi(v)]_{\mathcal{C}} = A_\varphi \cdot [v]_{\mathcal{B}}$.*

AZ: Notez que ceci définit un morphisme $\varphi \mapsto A_\varphi$ qui est en fait un isomorphisme entre les espaces vectoriels $\mathcal{L}(V, W)$ et $\mathbb{M}_{m\times n}(K)$. L'inverse est le morphisme qui associe à chaque matrice $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(K)$ l'unique application linéaire $\varphi : V \to W$ telle que $A = [\varphi]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = A_\varphi$. Lorsque $V = \mathbb{M}_{n\times 1}(K) \simeq K^n$ et $W = \mathbb{M}_{m\times 1}(K) \simeq K^m$ et les bases considérées sont les bases canoniques, on écrit φ_A pour désigner cette application φ.

AZ: ⚠ Il faut noter que tout ça dépend fortement des bases choisies.

Une autre aide visuelle précieuse à retenir est le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
{[v]_{\mathcal{B}}} & \mathbb{M}_{n\times1}(K)\simeq K^n \arrow[r, "\text{mult.}", "\text{par } A_\varphi"'] & \mathbb{M}_{m\times1}(K)\simeq K^m & {[\varphi(v)]_{\mathcal{C}}} \\
v \arrow[u, mapsto] & V \arrow[u, "\simeq_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "\varphi"] & W \arrow[u, "\simeq_{\mathcal{C}}"'] & \varphi(v) \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Changement de base

Définition. Soient $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ et $\tilde{\mathcal{B}} = (w_1, \ldots, w_n)$ deux bases d'un K-espace vectoriel V. On exprime les v_i en termes de la base $\tilde{\mathcal{B}}$:

$$v_j = p_{1j}w_1 + p_{2j}w_2 + \ldots + p_{nj}w_n.$$

On définit donc une matrice $P = (p_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$ telle que la j-ième colonne de P est le vecteur colonne $[v_j]_{\tilde{\mathcal{B}}}$. Cette matrice P s'appelle **la matrice de changement de base entre la base $\mathcal{B}$ et la base $\tilde{\mathcal{B}}$**. On dit aussi que P est la matrice de passage entre la base $\mathcal{B}$ et la base $\tilde{\mathcal{B}}$.

On note que P est la matrice de l'application identité $\mathrm{id} : V \to V$, par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$; c'est-à-dire $P = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}$. En particulier, P est nécessairement inversible et on a que

- $[v]_{\tilde{\mathcal{B}}} = P \cdot [v]_{\mathcal{B}}$ et
- $[v]_{\mathcal{B}} = P^{-1} \cdot [v]_{\tilde{\mathcal{B}}}$,

pour chaque vecteur $v \in V$.

AZ: Parfois, il sera utile d'écrire $P_{\mathcal{B}\to\tilde{\mathcal{B}}}$.

Théorème. *Soit $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$, soient $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$ deux bases de V et soient $\mathcal{C}$ et $\tilde{\mathcal{C}}$ deux bases de W. Posons, $P = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}$, $Q = [\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C},\tilde{\mathcal{C}}}$, $A_\varphi = [\varphi]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ et $\tilde{A}_\varphi = [\varphi]_{\tilde{\mathcal{B}},\tilde{\mathcal{C}}}$. Alors,*

$$\tilde{A}_\varphi = Q \cdot A_\varphi \cdot P^{-1}.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{M}_{n\times1}(K) \arrow[r, "P^{-1}"] & \mathbb{M}_{n\times1}(K) \arrow[r, "A_\varphi"] & \mathbb{M}_{m\times1}(K) \arrow[r, "Q"] & \mathbb{M}_{m\times1}(K) \\
V \arrow[u, "\simeq_{\tilde{\mathcal{B}}}"] \arrow[r, "\mathrm{id}_V"'] & V \arrow[u, "\simeq_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "\varphi"'] & W \arrow[u, "\simeq_{\mathcal{C}}"] \arrow[r, "\mathrm{id}_W"'] & W \arrow[u, "\simeq_{\tilde{\mathcal{C}}}"]
\end{tikzcd}$$

Opérations Élémentaires

Définition. On dit qu'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(K)$ est **échelonnée réduite** si soit $A = 0$ soit les quatre propriétés suivantes sont vérifiées.

(i) La première entrée non nulle dans chaque ligne non nulle de A est égale à 1 – ces coefficients s'appellent les pivots ;

(ii) chaque colonne de A contenant un pivot a toutes ses autres entrées égales à 0 ;

(iii) chaque ligne de A dont toutes les entrées sont égales à 0 apparaît sous chaque ligne ayant une entrée différente de zéro ; et

(iv) si les lignes $1, \ldots, r$ sont les lignes non nulles de A, et si le pivot de la ligne i se trouve dans la colonne j_i, pour $i = 1, \ldots, r$, alors $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$ – ces entiers $j_1, \ldots, j_r$ s'appellent les échelons de la matrice A.

Théorème. *Toute matrice $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(K)$ est ligne équivalente à une matrice $R \in \mathbb{M}_{m\times n}(K)$ échelonnée réduite. De plus, la matrice R est déterminée de manière unique.*

- Soit $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(K)$. Alors il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}(m, K)$ telle que PA est échelonnée réduite.
- Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$ une matrice carrée. Les conditions suivantes concernant A sont équivalentes.

  (i) A est inversible.

  (ii) La matrice échelonnée réduite qui est ligne équivalente à A est la matrice identité I_n.

  (iii) Il existe $C \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$ telle que $AC = I_n$.

  (iv) Il existe $B \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$ telle que $BA = I_n$.

  (v) Le système $AX = 0$ possède une solution unique, la solution triviale.

  (vi) Le rang (= rang-ligne = rang-colonne) de A est égal à n.
- Toute matrice inversible est égale à un produit de matrices élémentaires.

Le Déterminant

Si K est un corps et $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$ est une matrice carrée, alors le déterminant de A, désigné par $\det(A)$, est défini de telle manière que :

- si l'on permute deux lignes ou deux colonnes de A, le déterminant $\det(A) \in K$ change de signe ;
- si deux lignes ou deux colonnes de A sont identiques, le déterminant est nul ;
- on peut ajouter à une colonne (ou une ligne) de A un multiple d'une autre colonne (ou d'une autre ligne) sans changer la valeur du déterminant ;
- si l'on multiplie tous les termes d'une même ligne de A ou d'une même colonne par un scalaire α, le déterminant est multiplié par α ;
- en conséquence, si une ligne ou une colonne de A est nulle, le déterminant est nul.

De plus, le déterminant se comporte bien avec le produit des matrices :

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

et, en fait, il définit un morphisme de groupes $\det : \mathrm{GL}(n, K) \to K^{\times}$. En particulier, si $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$ sont des matrices semblables, alors $\det(A) = \det(B)$.

En général, le déterminant d'une matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

peut être calculé en utilisant la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \end{aligned} \tag{1}$$

où S_n désigne le groupe de toutes les bijections (permutations) de $\{1, 2, \dots, n\}$ et $\varepsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ.

AZ: ⚠ Notez que (1) nous dit que $\det(A) = \det(A^t)$.

Définition.

(i) On fixe un corps K et un K-espace vectoriel V. On suppose $\dim(V) = n$. Soit $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Le **déterminant** de T est l'unique scalaire dans K, noté $\det(T)$, tel que pour chaque $\alpha \in \mathcal{A}^n(V, K)$ et pour chaque liste de vecteurs $v_1, \dots, v_n \in V$ on a

$$\alpha(T(v_1), \dots, T(v_n)) = \det(T) \cdot \alpha(v_1, \dots, v_n)$$

(ii) Soit $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$ et $T \in \mathcal{L}(K^n, K^n)$ telle que la matrice de T par rapport à la base canonique de K^n est égale à A. Le déterminant de A, noté $\det(A)$, est défini par $\det(A) = \det(T)$.

AZ: ⚠ Ici, on note l'ensemble des formes m-linéaires sur V qui sont alternées par $\mathcal{A}^m(V, K)$. Si $m = n = \dim(V)$, alors on a vu que $\mathcal{A}^n(V, K)$ est de dimension 1.

Théorème. *L'application qui associe une liste $u_1, \dots, u_n$ de vecteurs dans K^n au scalaire $\det\left(\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix}\right)$ est une forme n-linéaire alternée sur K^n. Est la seule forme n-linéaire alternée sur K^n telle que $\det\left(\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}\right) = 1$.*

Quelques propriétés des déterminants en plus

- Un opérateur $T \in \mathcal{L}(V, V)$ est inversible si et seulement si $\det(T) \neq 0$. De plus, si T est inversible, alors $\det(T^{-1}) = (\det(T))^{-1}$.

- Soient $T \in \mathcal{L}(V, V)$, W un K-espace vectoriel de dimension finie n (=dim(V)) et $S \in \mathcal{L}(W, V)$ une application inversible. Alors

$$\det(S^{-1} \circ T \circ S) = \det(T).$$

- Si $T \in \mathcal{L}(V, V)$ et $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ est une base ordonnée de V. Alors,

$$\det(T) = \det\left([T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}\right).$$

Endomorphismes Linéaires

On fixe un corps K et un K-espace vectoriel V de dimension finie n.

Définition. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$.

(i) On dit que $v \in V$ est un **vecteur propre** de φ si $v \neq 0_V$ et $\mathrm{Vect}(v) = \mathrm{Vect}(\varphi(v))$. C'est-à-dire que v est non-nul et $\varphi(v)$ est un multiple scalaire de v. Ce qui revient à dire que $v \neq 0$ et qu'il existe un scalaire $\lambda \in K$ tel que $\varphi(v) = \lambda \cdot v$.

(ii) Le scalaire λ de (i) s'appelle la **valeur propre** de φ associée au vecteur propre v.

(iii) Si λ est une valeur propre de φ, alors le sous-espace $E_\lambda := \{v \in V \,;\, \varphi(v) = \lambda \cdot v\} \leq V$ s'appelle l'espace propre de φ associé à la valeur propre λ.

Définition. Soit $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(K)$. Soit encore x une indéterminée. Alors $c_A(x) := \det(A - x \cdot I_n) \in K[x]$ est appelé le **polynôme caractéristique** de la matrice A.

Définition. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$. Le polynôme caractéristique de φ, noté $c_\varphi(x)$, est le polynôme caractéristique de n'importe quelle matrice représentant φ par rapport à un choix de base ordonnée quelconque.

Définition. Soit $\lambda \in K$ une valeur propre d'une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$.

(i) La multiplicité algébrique de λ, notée $\mu_a(\lambda)$, est la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique.

(ii) La multiplicité géométrique de λ, notée $\mu_g(\lambda)$, est la dimension de l'espace propre E_λ. Autrement dit, c'est la dimension du noyau de l'application $\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}$.

Théorème. *Soient $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$ et $\lambda \in K$. Alors λ est une valeur propre de φ si et seulement si l'application linéaire $\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V$ n'est pas inversible. Si et seulement si $\ker(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \neq \{0\}$.*

- Tout opérateur sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel non trivial de dimension finie possède une valeur propre.
- Soit $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$, fixons une base ordonnée B de V et posons $A = [\varphi]_B$. Alors $\lambda \in K$ est une valeur propre de φ (ou de A) si et seulement si la matrice $A - \lambda \cdot I_n$ est non inversible, ce qui est le cas si et seulement si $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$.
- Deux matrices semblables (similaires) ont le même polynôme caractéristique. En particulier, deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

- Toute liste de vecteurs propres d'une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$ correspondant à des valeurs propres distinctes est linéairement indépendante.
- Chaque endomorphisme linéaire de V possède au plus $\dim(V) = n$ valeurs propres distinctes.
- Soit $\lambda \in K$ une valeur propre d'une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$. Alors, $\mu_g(\lambda) \leq \mu_a(\lambda)$.

Théorème. *Soit $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$. Alors φ est trigonalisable si et seulement si $c_\varphi(x)$ est scindé dans l'anneau $K[x]$.*

Théorème. *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes de $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *φ est diagonalisable.*

(ii) *V possède une base constituée des vecteurs propres de φ.*

(iii) $V = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_m}$

(iv) $\dim(V) = \dim(E_{\lambda_1}) + \ldots + \dim(E_{\lambda_m}) = \mu_g(\lambda_1) + \ldots + \mu_g(\lambda_m)$.

(v) *$c_\varphi(x)$ est scindé dans $K[x]$ et pour chaque $i = 1, \ldots, m$ on a que $\mu_g(\lambda_i) = \mu_a(\lambda_i)$.*

— Par conséquent, si le polynôme caractéristique $c_\varphi(x)$ possède n racines distinctes (dans K), alors φ est diagonalisable (sur K).

Théorème. *Supposons que $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V, V)$ et que $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ soit une base ordonnée de V. Alors,*

(i) *φ et ψ commutent si et seulement si les matrices $[\varphi]_\mathcal{B}$ et $[\psi]_\mathcal{B}$ commutent.*

(ii) *Supposons que φ et ψ commutent et que $\lambda \in K$ soit une valeur propre de φ. Alors E_λ est invariant sous ψ.*

(iii) *Supposons que φ et ψ soient diagonalisables. Alors, φ et ψ peuvent être représentées par des matrices diagonales par rapport à la même base si et seulement si φ et ψ commutent.*

(iv) *Si $K = \mathbb{C}$ et φ et ψ commutent, alors φ et ψ ont un vecteur propre commun et il existe une base de V par rapport à laquelle φ et ψ sont représentées par des matrices triangulaires supérieures.*

— Par conséquent, si $K = \mathbb{C}$ et φ et ψ commutent, alors :

(i) toute valeur propre de $\varphi + \psi$ est une valeur propre de φ plus une valeur propre de ψ, et

(ii) toute valeur propre de $\varphi \circ \psi (= \psi \circ \varphi)$ est une valeur propre de φ multipliée par une valeur propre de ψ.