18 novembre 2025

Serie 9

Exercice 1. Considérez un système linéaire dont la matrice augmentée est de la forme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & \alpha-1 \\ 0 & 0 & \alpha-3 & \alpha-2 \end{array}\right)$$

(i) Pour quelles valeurs de α le système n'aura-t-il pas de solution ?

(ii) Pour quelles valeurs de α le système admet-il une solution unique ?

(iii) Pour quelles valeurs de α le système aura-t-il une infinité de solutions ?

Exercice 2. Considérez les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.
Posez $U = \{X \in \mathbb{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \mid AX = BX\}$.

(a) Montrez que U est un sous-espace du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

(b) Trouvez une base de U et complétez cette base en une base de $\mathbb{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Considérez les vecteurs $v_1 = (1, -1, 1), v_2 = (1, 2, 1)$ et $v_3 = (0, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'unique application linéaire telle que $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) = (0, 0, 0)$ et $\varphi(v_3) = v_3$. Quelle est la dimension de l'image de φ ?

Exercice 4. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application $\mathbb{R}$-linéaire telle que $\varphi((1, 0)) = (1, -1, 1)$ et $\varphi((-1, 2)) = (1, 2, 1)$. Trouvez une base de $\ker(\varphi)$ et une base de $\operatorname{im}(\varphi)$.

Exercice 5. Soit K un corps et considérez $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{3\times 5}(K)$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ? Si elles sont vraies, fournissez une brève démonstration ; si elles sont fausses, fournissez un contre-exemple.

(a) Le rang de A est égal à trois.

(b) Le noyau de l'application K-linéaire $\varphi_A : \mathbb{M}_{5\times 1}(K) \to \mathbb{M}_{3\times 1}(K)$ définie par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{15} \\ a_{21} & \dots & a_{25} \\ a_{31} & \dots & a_{35} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

a dimension supérieure ou égale à deux.

(c) Il existe deux vecteurs linéairement indépendants u et v dans $\mathbb{M}_{5\times 1}$ tels que $\varphi(u) = \varphi(v) = 0$.

(d) Le système $AX = 0$ n'admet que la solution triviale.

(e) Les colonnes de A forment une partie liée de $\mathbb{M}_{3\times 1}(K)$.

Exercice 6. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ la matrice avec coefficients $a_{ij} = 2i + j - 2$.

(a) Montrez que l'application $\varphi : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ définie par $B \mapsto A \cdot B$ est $\mathbb{R}$-linéaire et déterminez la matrice de φ par rapport à la base $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ [1].

(b) Trouvez une base de $\ker(\varphi)$ et une base de $\operatorname{im}(\varphi)$.

1. Autrement dit, nous considérons cette base à la fois dans l'espace de départ et dans l'espace d'arrivé.