11 novembre 2025

Serie 8

Exercice 1. Dans chaque cas, trouver une base échelonnée réduite du sous-espace vectoriel W de K^n (on dit qu'une base ordonnée est « échelonnée réduite » si, en mettant les vecteurs dans l'ordre donné dans les lignes d'une matrice, la matrice est échelonnée réduite). Ensuite, compléter la base trouvée en une base de K^n.

(a) $K = \mathbb{Q}$, $n = 3$ et $W = \text{Vect}\big((1, 3, -2),\ (2, -3, 5)\big)$.

(b) $K = \mathbb{C}$, $n = 3$ et $W = \text{Vect}\big((1, i, 2),\ (1 + i, i, 2 + i),\ (1, 0, 1)\big)$.

(c) $K = \mathbb{F}_3$, $n = 5$ et $W = \text{Vect}\big((0, 2, 1, 0, 2),\ (1, 0, 1, 2, 1),\ (2, 0, 2, 2, 1)\big)$.

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}$. À l'aide de l'algorithme d'élimination de Gauss, déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles le système

$$\begin{cases} ax + (1-a)y + (1-a)z &= a^2 \\ ax + (1+a)y + (1+a)z &= a - a^2 \\ x + y + z &= 1 - a \end{cases}$$

(a) n'admet aucune solution,

(b) admet une infinité de solutions,

(c) admet une solution unique.

Ensuite, résoudre le système dans les cas (b) et (c).

Exercice 3. Soit $\alpha : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire définie par

$$\alpha(x, y, z, t) = ((i + 1)x,\ 3x + iy + (-1 + i)t,\ y + (a + i)t)$$

avec $a \in \mathbb{R}$, un nombre réel fixe.

(a) Trouver une base échelonnée réduite de $Im(\alpha)$.

(b) Quel est le rang de α ?

(c) Quelle est la dimension de $\ker(\alpha)$?

Exercice 4. Soit $\phi : \mathbb{C}^4 \to M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ l'application linéaire définie par $\phi(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a - b + c & a + b + d \\ 2a - ib & ib + c + d \end{pmatrix}$. Trouver une base de $\text{Im}(\phi)$.

Exercice 5. On considère des matrices à coefficients réels. Dans chaque cas trouver, si possible, les valeurs des nombres réels a et b telles que les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ a & 2 & 3 \\ b & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

soient de rang 2.

Exercice 6. Soient V, W et U des K-espaces vectoriels de dimension finie (non nulle). Soient $\alpha : V \to W$ et $\beta : W \to U$ des applications K-linéaires. On fixe des bases B_V, B_W et B_U de V, W et U respectivement et on pose $A = [\alpha]_{B_V,B_W}$ et $B = [\beta]_{B_W,B_U}$.

(a) Démontrer que $\mathrm{Im}\,(\beta \circ \alpha) \subseteq \mathrm{Im}\,(\beta)$.

(b) Démontrer que $\mathrm{rg}(BA) \leq \mathrm{rg}B$.

(c) Démontrer que $\ker(\alpha) \subseteq \ker(\beta \circ \alpha)$.

(d) Démontrer que $\mathrm{rg}(BA) \leq \mathrm{rg}A$.

(e) Trouver, dans chaque cas, un exemple où l'inclusion ou l'inégalité est stricte.

(f) Trouver, dans chaque cas, un exemple où l'inclusion ou l'inégalité constitue une égalité.