04 novembre 2025

Serie 7

Exercice 1. Échelonner les matrices suivantes pour obtenir une matrice ligne équivalente et sous une forme échelonnée réduite, et noter les opérations élémentaires effectuées à chaque étape de calcul :

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -2 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soient V et W deux K-espaces vectoriels de dimension finie et $\phi \in \mathcal{L}(V, W)$. Soient B_V, B_W des bases ordonnées de V et W, respectivement. Montrer que ϕ est bijective si et seulement si $[\phi]_{B_V, B_W}$ est une matrice inversible.

Exercice 3. Soit $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(K)$. Pour $1 \leq r \leq m$ et $\lambda \in K^\times$, posons $D_r(\lambda) \in \mathrm{GL}(n, K)$ la matrice dont le coefficient $D_r(\lambda)_{ij}$ satisfait

$$D_r(\lambda)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \neq r \\ 0, & \text{si } i \neq j \\ \lambda, & \text{si } i = j = r \end{cases}.$$

Démontrer que $D_r(\lambda)$ est la matrice élémentaire associée à l'opération élémentaire $A_r \to \lambda \cdot A_r$.

Exercice 4. Résoudre le système suivant. Trouver une base de l'espace des solutions.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3z + 11t - 10u = 0 \\ -x - 2y + 2z + 5t + 6u = 0 \\ 4z + 12t - 2u = 0 \\ 3x + 6y - 2z - 3t + 5u = 0 \end{cases}$$

Exercice 5 (Résultat à retenir)**.** Soit $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(K)$. Soit C_j la j-ème colonne de A et posons $W = \mathrm{Vect}\,(C_1, \ldots, C_n) \subset K^m$. Soit $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ les échelons dans la forme échelonnée réduite de A. Montrer que les colonnes $C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_r}$ forment une base de W.

(Notez que ce résultat peut être utilisé pour trouver une base de l'image d'une application linéaire après avoir échelonné la matrice de l'application.)