28 octobre 2025

Serie 6

Exercice 1. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$\phi(x, y, z) = (2x + y, 3x + y - z, x + y + z).$$

(a) Montrer que ϕ est linéaire.

(b) Déterminer $\ker(\phi)$ et l'interpréter géométriquement. Calculer la dimension de $\ker(\phi)$.

(c) Déterminer le rang de ϕ.

(d) L'application ϕ est-elle surjective?

Exercice 2. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes?

(a) L'application $\phi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\phi(z_1, z_2) = z_1 - \overline{z_2}$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

(b) L'application ϕ du point (a) est $\mathbb{R}$-linéaire.

(c) L'ensemble $\phi^{-1}(0)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

(d) L'ensemble $\phi^{-1}(0)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(e) Si $n > m$ et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\ker(f) \neq \{0\}$.

(f) Si $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ est une application linéaire surjective, f est aussi injective.

Exercice 3. Soit $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'application définie par $\varphi(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x + y & y + z - 2t \\ x - y + z + t & 2x + y + 2z - t \end{pmatrix}$. On admettra que φ est une application $\mathbb{R}$-linéaire.

(a) Déterminer $\ker(\varphi)$ ainsi que sa dimension. L'application φ est-elle injective?

(b) Déterminer le rang de φ. L'application φ est-elle surjective?

Exercice 4. Soient V un K-espace vectoriel et $\varphi : V \to V$ une application K-linéaire. On suppose que $\dim(V) = 9$ et $\varphi^2 = 0$. Montrer que $\dim(\mathrm{km}(\varphi)) \leq 4$. Justifiez vos raisonnements.

Exercice 5. Soit $\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$\alpha(x, y, z, t) = (2x - y, x + y + z + t, 3y - 2z + x - t).$$

(a) Déterminer la matrice de α par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et de $\mathbb{R}^3$.

(b) Quel est le vecteur colonne de $\alpha(0, 1, 0, 0)$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

(c) Montrer que $F = \{(-1, 0, 0, 1), (0, 4, 0, 1), (0, 0, 3, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

d) Déterminer le vecteur colonne de $v = (1, 4, 3, -1)$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(d) Déterminer le vecteur colonne de v par rapport à la base F.

Exercice 6. Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie et soit $W \subseteq V$ un sous-espace vectoriel. Posons $H = \{\theta \in \mathrm{GL}(V) \mid \theta(W) \subseteq W\}$ (on l'appelle *le stabilisateur de W dans V*. Montrer que H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$. (On rappelle que la loi de composition dans le groupe $\mathrm{GL}(V)$ est la composition d'applications.)

Exercice 7. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$\phi(x, y, z) = (3x - y + 2z,\ x + 3y - z,\ x - 3y + 5z,\ 2x - y)$$

et soit $\psi : \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $\psi(f(t)) = (f(0), 0, f(2))$.

(a) Déterminer la matrice de ψ par rapport à la base $T = (1, t, t^2)$ de $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ et la base canonique de $\mathbb{R}^3$, ainsi que la matrice de ϕ par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$.

(b) A l'aide d'un calcul matriciel, déterminer la matrice de $\phi \circ \psi$ par rapport aux bases données de $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ et $\mathbb{R}^4$.

(c) A l'aide d'un calcul matriciel, déterminer le vecteur colonne de $\psi(t^2 - 3t + 4)$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(d) A l'aide d'un calcul matriciel, déterminer le vecteur colonne de $\phi(\psi(t^2 - 3t + 4))$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 8. Soit $\beta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}[t]_{\leq 2}$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire définie par

$$\beta(z_1, z_2) = (1 - i)z_2 + iz_1 t + (z_1 - z_2)t^2.$$

Soit E la base canonique de $\mathbb{C}^2$ et E' la base $(1, t, t^2)$ de $\mathbb{C}[t]_{\leq 2}$. Soient $F = ((1, i), (2, i))$, $G = (t, 1 + it + t^2, -t - it^2)$.

(a) Montrer que F est une base de $\mathbb{C}^2$ et que G est une base de $\mathbb{C}[t]_{\leq 2}$.

(b) Déterminer $[\mathrm{id}\,]_{F,E}$, $[\mathrm{id}\,]_{G,E'}$ et $[\beta]_{E,E'}$.

(c) Déterminer $[\mathrm{id}\,]_{E',G}$.

(d) Déterminer $[\beta]_{F,G}$.

Exercice 9. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(K)$.

(a) Montrer que si $ad - bc \neq 0$ alors A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

(b) On considère l'application $\mathbb{C}$-linéaire $\phi : \mathbb{C}[t]_{\leq 1} \to \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{C})$ définie par $\phi(f) = \begin{pmatrix} f(i) \\ f(0) \end{pmatrix}$. On pose les bases ordonnées suivantes des deux espaces vectoriels :
$B_1 = (1, t)$, $B_2 = (t - i, i)$, des bases de $\mathbb{C}[t]_{\leq 1}$ et
$C_1 = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, et $C_2 = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix})$, des bases de $\mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{C})$.
Trouver les matrices de passage suivantes :
$[\mathrm{id}]_{B_1,B_2}$, $[\mathrm{id}]_{B_2,B_1}$, $[\mathrm{id}]_{C_1,C_2}$, $[\mathrm{id}]_{C_2,C_1}$.

(c) Trouver les matrices de ϕ par rapport aux differents choix des bases, comme suit :
$[\phi]_{B_1,C_1}$, $[\phi]_{B_1,C_2}$, et $[\phi]_{B_2,C_2}$.