

14 octobre 2025

## Serie 5

**Exercice 1.** Soient  $V$  un  $K$ -espace vectoriel et  $B = \{f_1, \dots, f_m\}$  une base. Démontrer que  $V = \text{Vect}(f_1) \oplus \dots \oplus \text{Vect}(f_m)$ .

**Exercice 2.**

(i) Pour quelles valeurs de  $a \in \mathbb{C}$  les 3 vecteurs du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}^3$

$$v_1 = (a, 1, 1), \quad v_2 = (i, a - 1, 1) \quad \text{et} \quad v_3 = (0, 0, a^2)$$

forment-ils une base de  $\mathbb{C}^3$ ?

(ii) Pour  $a = 2 - i$ ,  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est une base. Exprimer le vecteur  $(1 - i, 3, 1 + i)$  comme combinaison linéaire des vecteurs  $v_1, v_2$  et  $v_3$ ; c'est-à-dire, trouver les coordonnées du vecteur  $(1 - i, 3, 1 + i)$  par rapport à cette base.

**Exercice 3.** On considère les sous-espaces vectoriels suivants de  $X = \mathbb{M}_{2 \times 3}(\mathbb{C})$  :

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in X; a - b = c \text{ et } e - f = 0 \right\},$$

$$V = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 2+i \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

(i) Calculer  $\dim(U)$  et  $\dim(V)$ .

(ii) Trouver  $\dim(U \cap V)$ .

(iii) Déterminer si  $U + V = \mathbb{M}_{2 \times 3}(\mathbb{C})$ .

**Exercice 4.** Pour chacun des espaces vectoriels suivants, trouver une base et donner la dimension.

(i) Le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $T$  des matrices  $A = (a_{rs})_{1 \leq r, s \leq n} \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$  telles que  $a_{rs} = i \cdot a_{sr}$  pour tous  $r \leq s$ ,

(ii) Le  $\mathbb{F}_7$ -espace vectoriel  $V = \{(x, y, z) \in (\mathbb{F}_7)^3 \mid x + y + 2z = 0 \text{ et } 3y + z = 0\}$ .

**Exercice 5.**

(i) Une matrice  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$  est dite scalaire s'il existe  $d \in \mathbb{C}$  tel que

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ d & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble  $V$  des matrices scalaires est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ .

(ii) On définit la trace d'une matrice  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$  par  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ . Montrer que l'ensemble  $W$  des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ .

(iii) Montrer que  $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) = V \oplus W$ .

- (iv) Trouver une base de  $V$  et une base de  $W$ .
- (v) Déterminer les dimensions de  $V, W$  et de  $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ .
- (vi) Considérons maintenant l'espace vectoriel  $M_3(\mathbb{F}_3)$  et posons  $V$  le sous-espace vectoriel des matrices scalaires dans  $M_3(\mathbb{F}_3)$  et  $W$  le sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbb{F}_3)$  des matrices à traces nulles. (On admet que ces deux sous-ensembles sont des sous-espaces. Les preuves données pour (a) et (b) ne dépendent pas du corps  $\mathbb{C}$ .) Montrer que  $M_3(\mathbb{F}_3) \neq V \oplus W$ .

**Exercice 6.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension 5. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes?

- (i) Si trois éléments  $v_1, v_2, v_3$  de  $V$  sont deux à deux linéairement indépendants, alors les trois vecteurs sont linéairement indépendants.
- (ii) Une partie à 4 éléments est toujours libre.
- (iii) Soient  $U$  et  $W$  deux sous-espaces vectoriels de  $V$  tels que  $\dim(U) = 3$  et  $\dim(W) = 2$ . Si  $V = U + W$ , alors  $U \cap W = \{0\}$ .
- (iv) Pour deux sous-espaces vectoriels  $U$  et  $W$  avec  $\dim(U) = 3$  et  $\dim(W) = 3$ , on a  $\dim(U \cap W) = 1$ .

**Exercice 7.** Les applications suivantes sont-elles linéaires?

- (i)  $\alpha_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha_1(x, y, z) = (x - 4y + 17z, y - z + \sin(z))$ .
- (ii)  $\alpha_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha_2(x, y) = (x + 3y, x^2 + y^2)$ .
- (iii)  $\alpha_3 : \mathbb{F}_2^2 \longrightarrow \mathbb{F}_2^2, \quad \alpha_3(x, y) = (x + y, x^2 + y^2)$ .
- (iv)  $\alpha_4 : \mathcal{C}([0, 3], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha_4(f) = 37f(1) + 58 \int_2^3 f(x)dx$ , où  $\mathcal{C}([0, 3], \mathbb{R})$  désigne l'ensemble des fonctions continues de  $[0, 3]$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 8.** Soient  $V, W$  et  $U$  des  $K$ -espaces vectoriels et soient  $\phi : V \rightarrow W, \psi : V \rightarrow W$  et  $\theta : W \rightarrow U$  des applications  $K$ -linéaires.

- (i) Montrer que  $\phi + \psi$  est une application  $K$ -linéaire.
- (ii) Soit  $\lambda \in K$ . Montrer que  $\lambda\phi$  est une application  $K$ -linéaire.
- (iii) Démontrer que  $\theta \circ \phi$  est une application  $K$ -linéaire.