

07 octobre 2025

## Serie 4

**Exercice 1.** Soient  $K$  un corps et  $K[t]_{\leq d}$  l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus  $d$  à coefficients dans  $K$ . Soit  $\lambda \in K$  fixé. Soient  $U = K[t]_{\leq 2}$  et  $V = \{b_1t + \lambda b_3t^3 + \lambda^2 b_4t^4 \mid b_1, b_3, b_4 \in K\}$ . Montrer que  $U$  et  $V$  sont des sous-espaces vectoriels de  $K[t]_{\leq 4}$ .

**Exercice 2.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel avec sous-espaces vectoriels  $W_1, W_2 \subset V$ .

- (a) Démontrer que  $W_1 + W_2$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .
- (b) Démontrer que  $W_1 \cap W_2$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .
- (c) Donner un exemple dans  $V = \mathbb{R}^2$  de sous-espaces vectoriels  $W_1$  et  $W_2$  tels que  $W_1 \cup W_2$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $V$ .
- (d) Donner un exemple dans  $V = \mathbb{R}^3$  de trois sous-espaces vectoriels  $W_1, W_2, W_3$  tels que le sous-espace  $W_1 + W_2 + W_3$  n'est pas la somme directe des sous-espaces  $W_1, W_2, W_3$ .

**Exercice 3.** Trouver les valeurs de  $a \in \mathbb{C}$  telles que la partie suivante  $X$  de  $M_2(\mathbb{C})$  soit libre:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ai & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pour  $a = i$ , exprimer la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & i-2 \end{pmatrix}$  comme combinaison linéaire d'éléments de  $X$ .

**Exercice 4.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  fixé. Dans  $\mathbb{R}[t]$ , on considère la famille de polynômes

$$\mathcal{F} = \{(\lambda^2 - 1)t^3 + t^2, \lambda t^3 + t - \lambda, (1 - \lambda)t^3 + t + 1, \lambda\}.$$

Pour quelles valeurs de  $\lambda$  cette famille est-elle libre dans  $\mathbb{R}[t]$ ?

**Exercice 5.** Soient  $v = (a, b)$  et  $w = (c, d)$  des vecteurs dans  $K^2$ . Montrer que  $\{v, w\}$  est un ensemble de vecteurs linéairement dépendants si et seulement si  $ad - bc = 0$ .

**Exercice 6.** Pour chaque sous-espace vectoriel  $W$  de l'espace vectoriel  $V$  donné, trouver une famille génératrice de cardinalité 3, et une autre de cardinalité 4.

- (a)  $V = \mathbb{F}_5^5$  (sur  $\mathbb{F}_5$ ),  $W = \{(a, b, c, d, e) \in V \mid a + b = c - d, a + 2c = 0, b - c = 2c - d\}$
- (b)  $V = \mathbb{R}[t]$  (sur  $\mathbb{R}$ ),  $W = \{f \in V \mid \deg(f) \leq 2, f(1) = 0 = f(-1)\}$

**Exercice 7.** Soient  $p, q \in \mathbb{C}$  et considérons les vecteurs  $u = (p, 0, p - q)$ ,  $v = (0, p, q)$  et  $w = (1, p, p) \in \mathbb{C}^3$ . Laquelle des affirmations suivantes est vraie?

- (a) Les vecteurs  $u, v, w$  sont linéairement dépendants si et seulement si  $p = 0$ .
- (b) Les vecteurs  $u, v, w$  sont linéairement dépendants si et seulement si  $p = q$ .
- (c) Les vecteurs  $u, v, w$  sont linéairement indépendants si  $p \notin \{0, 1\}$  et  $q = ip$ .

**Exercice 8.** On considère le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , montrer que la famille  $\{1, \sin, \sin^2, \sin^3\}$  est libre.

**Exercice 9.** Soit  $K$  un corps et  $V$  un  $K$ -espace vectoriel. Soient  $v_1, v_2, v_3$  trois éléments de  $V$ . Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes?

- (a) Si la famille  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est libre, alors  $\{v_1, v_3\}$  est libre.
- (b) Si la famille  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est libre, alors elle est aussi génératrice.
- (c) Les éléments  $v_1$  et  $v_2$  sont linéairement dépendants si et seulement si  $v_1$  est un multiple de  $v_2$ .
- (d) Si  $K = \mathbb{F}_5$ , alors  $\text{Vect}(v_1, v_2) = \text{Vect}(v_1 + 3v_2, 2v_1 + v_2)$ .
- (e)  $\text{Vect}(v_1 + 2v_2, v_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$ .
- (f) Si la famille  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est libre, alors  $\{v_1, v_2, v_3, 0\}$  est libre.
- (g) Si la famille  $\{v_1, v_2, v_3\}$  est génératrice, alors  $\{v_1 + v_3, v_2 + v_3, v_1 + 2v_3\}$  l'est aussi.
- (h) Si  $K = \mathbb{F}_7$  et si  $v_1$  et  $v_2$  sont linéairement indépendants, alors

$$\text{Vect}(v_1, v_2) = \text{Vect}(2v_1 + 3v_2, 6v_1 + 2v_2).$$

**Exercice 10.**

- (a) Dans le  $\mathbb{F}_3$ -espace vectoriel  $\mathbb{M}_{2 \times 3}(\mathbb{F}_3)$ , montrer que

$$\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

- (b) Soit  $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ . Déterminer si le sous-espace vectoriel  $W = \text{Vect}(t^2 - 2, t^2 + t, 2t^2 + t + 2)$  est égal à  $V$  et pareil pour  $U = \text{Vect}(t^2 - 2, t^2 + t, 2t^2 + t - 2)$ .
- (c) Vrai ou faux :  $\text{Vect}(t^k \mid k \geq 1) = K[t]$ .